

۱. در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

الف) تابع $y = (X+1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی، نزولی) است.

ب) هر چه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزد یکنواخت خواهد شد.

پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل، ناسازگار) هستند.

پاسخ: الف) صعودی ب) کوچکتر پ) ناسازگار

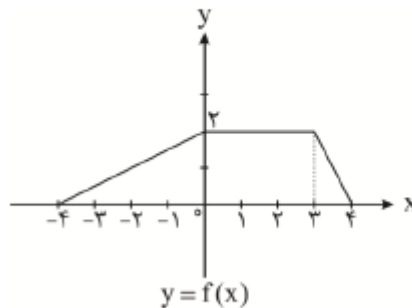
۲. دو تابع $f(X) = \sqrt{X-4}$ و $g(X) = \frac{1}{X^2-1}$ وارون یکدیگرند. (درست، نادرست)

دوره تناوب تابع $y = \tan X$ برابر 2π است. (درست، نادرست)

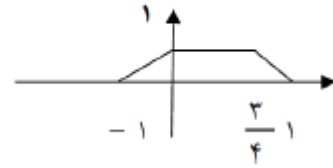
شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط توپر مییاشد. (درست، نادرست)

پاسخ: الف) درست ب) نادرست پ) درست

۲. با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار $y = \frac{1}{2} f(4x)$ را رسم کنید.



پاسخ:



۳. الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع و $y = 1 - \sin\left(\frac{-\pi}{3}X\right)$ را به دست آورید.

ب) معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده جواب های کلی آن را بنویسید

$$\text{الف) } \max = |-2| + 1 = 3, \min = -|-2| + 1 = -1$$

$$\text{ب) } 1 - 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۴. الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

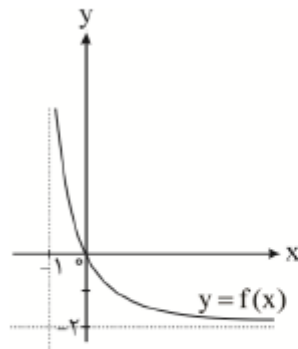
$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

۵. با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ حدهای خواسته شده را بنویسید

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$



$$۱) \frac{-1}{-} = +\infty \quad \text{(الف)}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = +\frac{1}{6}$$

$$۳) -2$$

$$۴) +\infty$$

۶. اکستریم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $(-1, 3)$ به دست آورید.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$$

(1, -7) مینیمم مطلق و نقطه

(3, 45) ماکزیمم مطلق

۷. ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. میخواهیم از چهار گوشه آن مربعهای کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمیگردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

$$v(x) = (1-2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$$

$$v'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$$

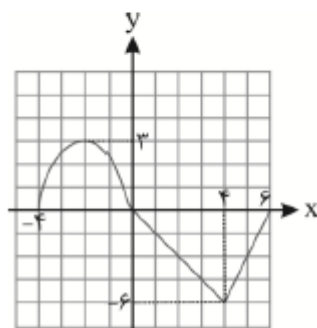
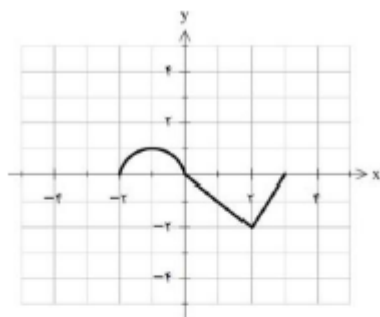
$$x = \frac{1}{6} \text{ قابل قبول است.}$$

۸. سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است.

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{67}{270}$$

۹. نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است

الف) نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید



ب) دامنه تابع بالا تعیین کنید. $D=(-4,6)$

اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$$

۱۰. مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = (x^4 - 3x)^5 \text{ (الف)} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x} \text{ (ب)}$$

پاسخ

$$f'(x) = 5(x^4 - 3x)^4 (4x^3 - 3) \\ g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$$

۱۱. اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-۱, ۳]$ به دست آورید.

پاسخ: (۱ و -۷) - مینیمم مطلق و نقطه (۳ و ۴۵) - ماکزیمم مطلق

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \end{cases} \\ f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$$

۱۲. وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$$O_1 = (-1, 2), r_1 = 1, O_2 = \begin{cases} -\frac{a}{r} = 1 \\ \frac{b}{r} = -2 \end{cases}, r_2 = \frac{1}{r} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20} > 1+2 = 3$$

پاسخ: دو دایره متخارج هستند

۱۳. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.

ب) حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

ج) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست. خط $x=0$ را ----- می نامیم.

الف) R ب) صفر پ) مماس قائم هر مورد

$$y = \sqrt{2} - \cos \frac{\pi}{2} x$$

۱۴. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 1 + \sqrt{2} \\ \min &= -|a| + c = -1 + \sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

پاسخ

۱۵. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x| - 3}{x - 3}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)} = \frac{24}{5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

۱۶. به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید

$$\begin{aligned} f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = 4 \\ f'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} = -4 \end{aligned} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$$

۱۷. مشتق تابعهای زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$\text{الف) } f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^8$$

$$\text{ب) } g(x) = \left(\frac{1}{x} \right) (\sqrt{3x+2})$$

$$\text{الف) } f'(x) = 8 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^7 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2} \right)$$

$$\text{ب) } g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right) (\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)$$

۱۸. تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ در نظر بگیرید.

الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[1, 3]$ در صورت وجود به دست آورید.

x		-1		2	
f'	-	o	+	o	-
f		↘	↗	↘	
		-16		11	
		min		max	

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(-1) = -9 \text{ min}$$

$$f(2) = 11 \text{ max}$$

$$f(3) = 0$$

۱۹. هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشی ههای بالا و پایین هر صفحه 2 cm و حاشی ههای کناری هر کدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

$$xy = 12 \Rightarrow f(x) = (y+2)(x+4) = \frac{12}{x} + 4 + 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{-12}{x^2} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, y = 4$$

۲۰. اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد

الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

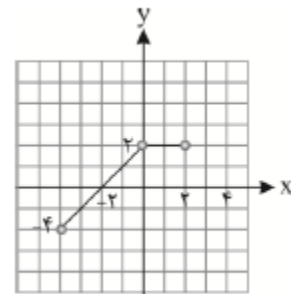
ب) مقدار $\text{gof}(2) - \frac{f}{g}(0)$ تعیین کنید.

۵

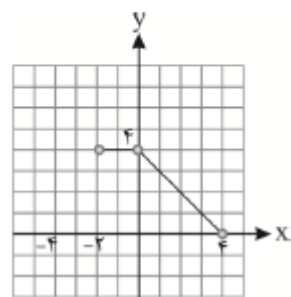
پاسخ: الف) $D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$

ب) $\text{gof}(2) - \frac{f}{g}(0) = -1 - (-2) = 1$

۲۱. با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.



پاسخ:



۲۲. اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد.

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

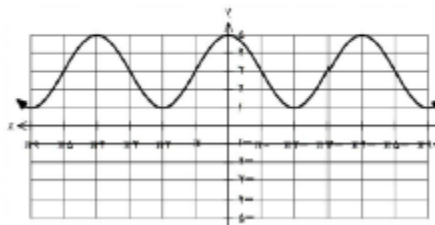
ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعریف کنید

الف)

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in D_f\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad (g \circ f)(2) = 1$$

۲۳. نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار ضابطه آن را مشخص کنید.



$$c = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$|a| = \frac{4-0}{2} = 2, a > 0, a = 2$$

$$b = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4 \Rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

$$\Rightarrow y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 2$$

۲۴. معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲۵. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{[x]}{|2x+1|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

پاسخ

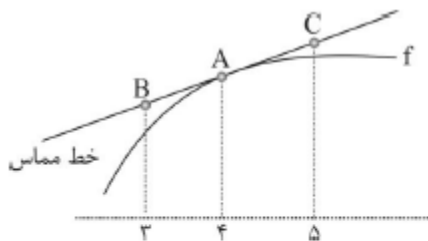
الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$:

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{-1}{|2x+1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $-\frac{1}{2}$ برابر ۱- است. بنابراین جواب حد برابر $-\infty$ می شود.

ج) $\frac{2+0}{0-5} = -\frac{2}{5}$

۲۶. برا تابع f در شکل روبه رو داریم $f'(4)=1.5$ و $f(4)=24$ با توجه به شکل مختصات نقاط C.B را بیابید.



$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$$

$$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$$

۲۷. مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

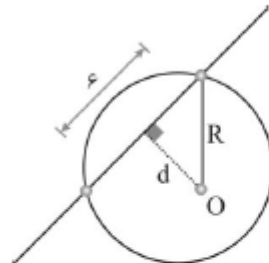
$$\text{الف) } f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ب) } g(x) = (3x^2 - 2)(2x - 5)^2$$

$$\text{الف) } f'(x) = \left(\frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} \right)$$

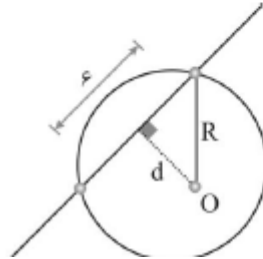
$$\text{ب) } g'(x) = (6x)(2x-5)^2 + (2)(2)(2x-5)(3x^2-2)$$

۲۸. مرکز دایره ای نقطه $O(2, -3)$ است این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می کند معادله دایره را بنویسید.



$$d = \frac{|3 \times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \quad R = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$



پاسخ:

۲۹- اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰,۰۸ و نوزاد دختر ۰,۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا امئن فرزندی باشد با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{100} = \frac{11}{200}$$

۳۰- سوالات چهار گزینه ای:

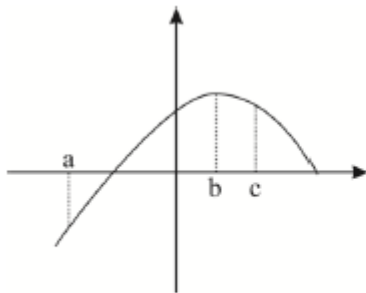
الف) برد تابع f باز $[-3, 1]$ است برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟

- (a) $[-8, 0]$ (b) $[-12, 0]$ (c) $[1, 9]$ (d) $[-10, 2]$

ب) کدام یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟

- (a) $(0, 0)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(-1, 0)$ (d) $(1, 0)$

پ) با توجه به نمودار تابع f اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب m_c, m_b, m_a نمایش داده شود کدامیک از گزینه های زیر صحیح است



ث) $m_c = m_b = m_a$

پ) $m_a > m_b > m_c$

ب) $m_b > m_a > m_c$

الف) $m_c > m_b > m_a$

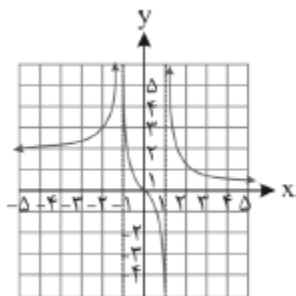
پ (III)

پاسخ: (I) پ (II) ب

۳۱. معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳۲. نمودار تابع f بشکل مقابل است حدود خواسته شده را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

پاسخ:

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$

۳۳. مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

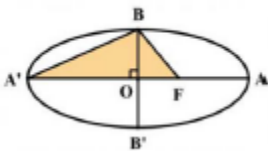
ب) $h'(t) = -1 \cdot t + 40 = 25 \Rightarrow t = 0/5$

۳۴. اکستریم های نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x = 3, x = -1$

x	-1	3
f'	+	-
f	max $\frac{4}{3}$	min $-\frac{25}{3}$

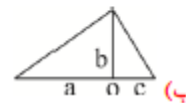
۳۵. اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد
الف) مقدار $A'F$ را بدست آورید ب) مساحت مثلث هاشور خورده BFA' چقدر است؟



$a = 5 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow A'F = 8$
 $b = 4$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5 + 3) \times 4 = 16$

پاسخ: الف)



۳۶. نشان دهید تابع $g(x) = \frac{x+4}{3}$ و $f(x) = 3x-4$ وارون یکدیگرند.

الف) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-6, +\infty) \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$

ب) $h(x) = x^2 - 5 \quad x \geq 0$

۳۷. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

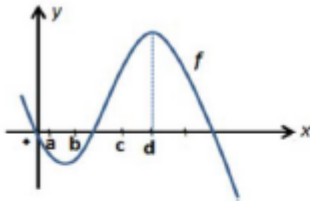
$$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 2$$

$$\begin{aligned} \min &= -|a| + c \\ \max &= |a| + c \end{aligned} \Rightarrow \max = \pi - 2, \quad \min = -\pi - 2$$

پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{4}|} = 8\pi$$

۳۸. با در نظر گرفتن نمودار f در شکل نقاط به طولهای a, b, c, d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	$\bullet$
	$\bullet / \Delta$
	2
	$-\bullet / \Delta$

پاسخ:

x	d	b	c	a
$f'(x)$	$\bullet$	$\bullet / \Delta$	2	$-\bullet / \Delta$

۳۹. مشتق تابعهای زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad f(x) &= (x^2 + 1)^2 (5x - 1) \\ \text{ب)} \quad g(x) &= \frac{9x - 2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

پاسخ:

$$\text{الف)} \quad f'(x) = 2(2x)(x^2 + 1)^2 (5x - 1) + 5(x^2 + 1)^2$$

$$\text{ب)} \quad g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - (\frac{1}{2\sqrt{x}})(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

اگر: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست. (۱/۲۵)

سج:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = 0 \end{aligned} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

<https://sahelbarati.ir>