

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

کتاب معلم
(راهنمای تدریس)

ریاضی

پایه نهم
دوره اول متوسطه

۱۳۹۴



DELTA | دلتا

عمومی های جدید

دوره عمومی دلتا-رهپویان استخدام
ویژه دروس عمومی جدید دبیری ریاضی
به شیوه نکته و تست
خط به خط بدون حذفیات



 @Erahpooyan



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

نام کتاب:

کتاب معلم ریاضی نهم دوره اول متوسطه - ۸۹

پدیدآورنده:

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده بر نامه ریزی و تألیف:

حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، طیبه حمزه بیگی، خسرو داودی، محمد هاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی نیا، اکرم قایل رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه ریزی) حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، خسرو داودی، کبری دلشاد، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر (اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری:

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده سازی:

لیدا نیکروش (مدیر امور فنی و چاپ) - مهدی کریم خانی (طراح گرافیک، طراح جلد) - مریم نصرتی (صفحه آرا) - کبری اجابتی، مرضیه اخلاقی، رعنا فرج زاده دروئی، فرشته ارجمند، سپیده ملک ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی، احمد رضا امینی (امور آماده سازی)

نشانے، سازمان:

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtexbook.ir

ناشر:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان

چایخانه:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ:

جَابِ اَوَّلٍ ۱۳۹۴

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هر گونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت جایی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکسبرداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکیه بر هر شکل و نوع بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



- انسان عصاره همه موجودات عالم است.
- با تربیت صحیح ممکن نیست که یک مملکتی تحت تأثیر استعمار باشد.
- اگر ملتی بخواهد به طرف سعادت پرواز کند باید با دو بال تهذیب نفس و علم باشد.

امام خمینی (ره)

فصل ۱ مجموعه‌ها ۱

- ۲ نگاه کلی به فصل
- ۴ نمونه سؤال‌های ارزشیابی
- ۷ درس اول: معرفی مجموعه
- ۹ درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها
- ۱۱ درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها
- ۱۳ درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال
- ۱۶ حل تمرین‌ها

فصل ۲ عددهای حقیقی ۲۱

- ۲۲ نگاه کلی به فصل
- ۲۷ نمونه سؤال‌های ارزشیابی
- ۲۹ درس اول: عددهای گویا
- ۳۳ درس دوم: عددهای حقیقی
- ۳۷ درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی
- ۴۰ حل تمرین‌ها

فصل ۳ استدلال و اثبات در هندسه ۴۵

نگاه کلی به فصل ۴۶

نمونه سؤال های ارزشیابی ۵۱

درس اول: استدلال ۵۶

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه ۵۸

درس سوم: همزهستی مثلث ها ۶۱

درس چهارم: حل مسئله در هندسه ۶۴

درس پنجم: شکل های متشابه ۶۷

حل تمرین ها: ۵۷, ۵۹, ۶۲, ۶۵, ۶۷

فصل ۴ توان و ریشه ۶۹

نگاه کلی به فصل ۷۰

نمونه سؤال های ارزشیابی ۷۲

درس اول: توان صحیح ۷۴

درس دوم: نماد علمی ۷۵

درس سوم: ریشه گیری ۷۷

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال ها ۷۸

حل تمرین ها ۷۹

فصل ۵ عبارت‌های جبری ۸۸

- نگاه کلی به فصل ۸۹
- نمونه سؤال‌های ارزشیابی ۹۵
- درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد ۱۰۱
- درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها ۱۰۵
- درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها ۱۰۹
- حل تمرین‌ها ۱۰۳, ۱۰۸, ۱۱۱

فصل ۶ خط و معادله‌های خطی ۱۱۳

- نگاه کلی به فصل ۱۱۴
- نمونه سؤال‌های ارزشیابی ۱۱۷
- درس اول: معادله خط ۱۱۹
- درس دوم: شیب و عرض از مبدأ خط ۱۲۱
- درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی ۱۲۴
- حل تمرین‌ها ۱۲۶

فصل ۷ عبارت‌های گویا ۱۳۳

نگاه کلی به فصل ۱۳۴

نمونه سؤال‌های ارزشیابی ۱۴۰, ۱۴۶, ۱۵۲

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا ۱۳۶

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا ۱۴۳

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۱۴۹

حل تمرین‌ها ۱۵۳

فصل ۸ حجم و مساحت ۱۶۲

نگاه کلی به فصل ۱۶۳

نمونه سؤال‌های ارزشیابی ۱۶۶

درس اول: حجم و مساحت کره ۱۶۸

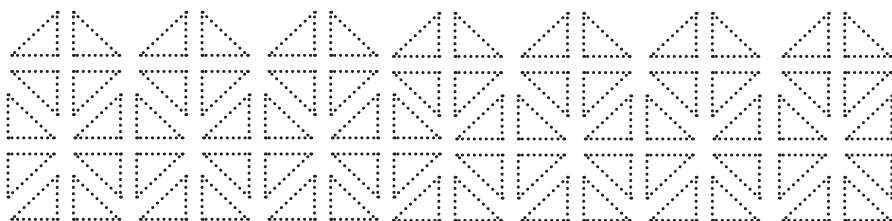
درس دوم: حجم هرم و مخروط ۱۷۱

درس سوم: سطح و حجم ۱۷۴

حل تمرین‌ها ۱۷۷

سخنی با معلم

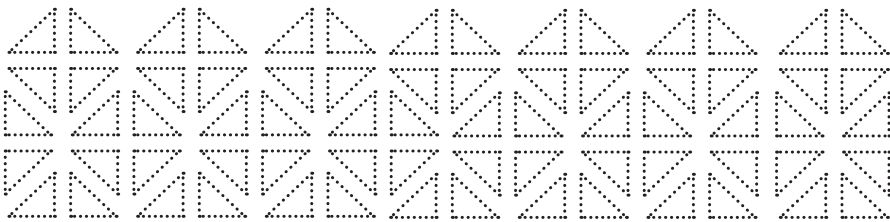
کتاب ریاضی پایه نهم بر مبنای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است. در رویکرد جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است. اگرچه رسیدن به چنین هدفی با موانع، مشکلات و دشواری‌های فراوانی روبه‌روست و تحقق کامل آن به سرعت امکان‌پذیر نیست؛ ولی مدنظر قرار دادن چنین هدفی می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. اصلی‌ترین و مؤثرترین نقش در این جهت به عهده معلم است. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلم با برنامه‌های جدید ستودنی است. مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند که برای ادای وظیفه نسبت به آموزش معلمان، ضمن اطلاع‌رسانی به موقع درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی را به موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند. ساختار کتاب درسی از سه بخش فعالیت، کار در کلاس و تمرین تشکیل شده است. آنچه در انجام یک فعالیت به‌طور عمده مدنظر بوده است، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل ماند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه حل، مرتب کردن، قضاوت درباره یک راه حل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلم انجام می‌پذیرد و هر جا که لازم باشد، راهنمایی توسط معلم ارائه خواهد شد. در بسیاری موارد انجام فعالیت ساده و آسان نیست و صدا البته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حد متوسط طراحی شده‌اند. معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحاتی بیشتر و تغییراتی فعالیت را ساده‌تر نماید.



هنگام انجام فعالیت، هدایتِ گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از ایده‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهدهٔ معلم است. به طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

دربارهٔ ضرورت آموزش راهبردهای حل مسئله در بین پژوهشگران و آموزشگران تقریباً اتفاق نظر وجود دارد. با این حال دربارهٔ چگونگی این کار نظرات متفاوتی هست. در این کتاب آموزش راهبردها از متن درس جدا نشده است. ضمناً اصراری بر ذکر عناوین راهبردها جز موارد مشخص و آشنا نبوده است. بنابراین سعی شده است که از عبارات و واژه‌های نامأنوس اجتناب شود. با آنکه بخش جداگانه‌ای با عنوان حل مسئله در کتاب وجود ندارد؛ ولی در اکثر فعالیت‌ها دانش‌آموزان به نوعی درگیر فرآیند حل مسئله می‌شوند. علاوه بر این اساساً آموزش راهبردها معمولاً به زمانی طولانی نیاز دارد؛ زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده‌ها راهبرد جزئی‌تر باشد. ارائه راه حل‌ها و روش‌های مختلف برای یک مسئله نیز به صورت هدفمند دنبال شده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان هنگام روبه‌رو شدن با یک مسئله - به ویژه وقتی که الگوریتمی مشخص برای حل آن فرانگرفته باشند - به روش‌های متفاوتی عمل می‌کنند.



پس از آماده شدن نسخه اولیه کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح کتاب برگزار کردند و برخی تغییرات و اصلاحات را در کتاب اعمال نمودند. علاوه بر این نظرات اعتباربخشی و نیز نظرات دبیران سراسر کشور نیز مدنظر قرار گرفت. لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از تمام همکارانی که نسخه اولیه کتاب را مطالعه کرده‌اند و نظرات و بررسی‌ها و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، اعلام کنیم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نویدبخش حضور و مشارکت مؤثرتر دبیران ریاضی در تألیف کتاب‌های درسی است. لازم به ذکر است مشاورانی علمی از مراکز آموزشی و پژوهشی و دانشگاه‌ها نیز بخش‌هایی محدود از کتاب را مطالعه و مورد نقد قرار دادند که جا دارد از آنها قدردانی شود. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق سایت واحد^۱ دارد. به‌علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق سایت واحد قابل دریافت است. همچنین فیلم‌های روش تدریس فصل‌های مختلف کتاب که توسط مؤلفین ارائه شده و در قالب یک لوح فشرده تحت عنوان «بر فراز آسمان» تهیه گردیده و در اختیار معلمان محترم قرار گرفته است. این فیلم‌ها از طریق سایت واحد ریاضی نیز قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال، تنها با تلاش، اراده و همت معلمان عزیز می‌توان به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار بود.

معلمان محترم و صاحب نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email)

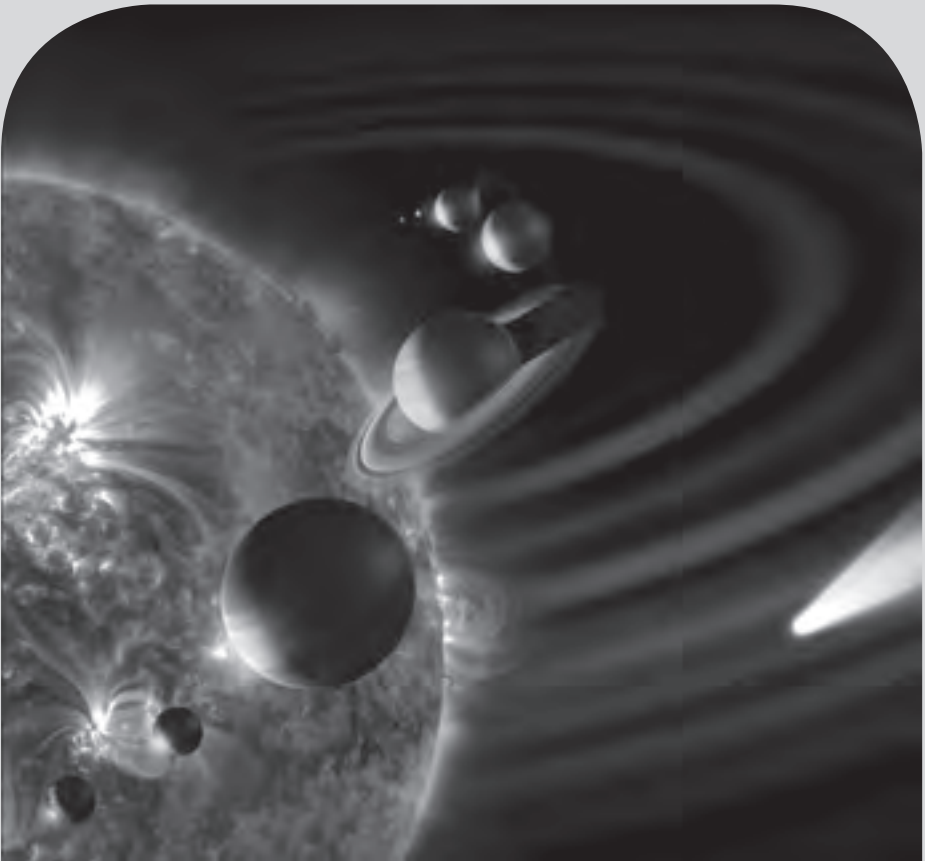
ارسال نمایند. talif@talif.sch.ir

دفترتالیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری



مجموعه ها

وَهُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ
 او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های خشکی
 و دریا، به وسیله آنها راه یابید...
 (سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی
 مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید، ستاره هایی با بزرگی
 چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین
 نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشانند.

نگاه کلی به فصل

دانش آموزان در کتاب نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه، اعمال روی مجموعه‌ها و نمایش مجموعه‌ها و کاربردهای آن آشنا می‌شوند.

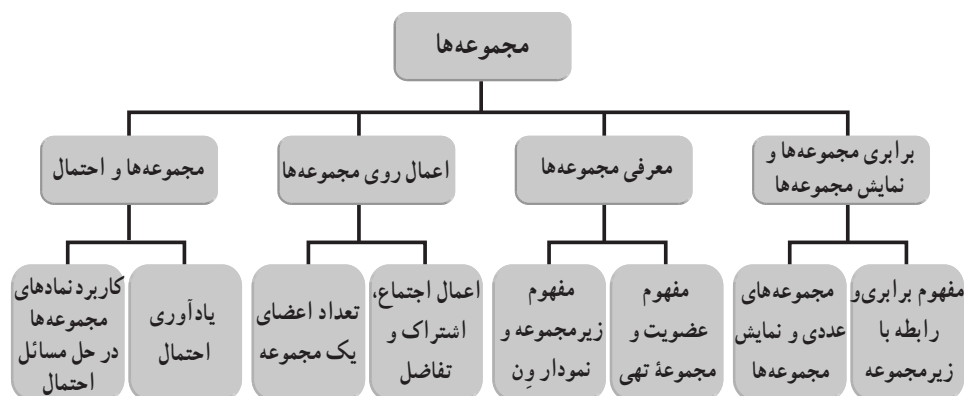
درس اول از این فصل به معرفی مجموعه می‌پردازد و واژه مجموعه را که در زبان محاوره‌ای به کار می‌رود با اصطلاح مجموعه که در ریاضی به کار می‌رود مقایسه و به بیان تفاوت‌های آن می‌پردازد. در این درس به معرفی دو مفهوم بسیار مهم یعنی عضویت و جزئیت (زیر مجموعه) پرداخته شده و همچنین به بیان توصیفی مجموعه‌ها و تبدیل آن به زبان ریاضی و تعریف مجموعه تهی در این درس پرداخته می‌شود.

در درس دوم مفهوم برابری بین دو مجموعه معرفی و نمایش مجموعه‌ها در شکل‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در درس سوم به معرفی سه عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل بین مجموعه‌ها و استفاده از نمودار ون برای نمایش آنها پرداخته شده است.

در درس چهارم ضمن یادآوری مسائل احتمال که دانش آموزان در دو کتاب ریاضی هفتم و هشتم مطالعه کرده‌اند به کاربردها و استفاده‌های مفهوم مجموعه و نمادهایی که برای مجموعه‌ها و تعداد اعضای یک مجموعه به کار برده شده، در احتمال و حل مسائل مربوط به احتمال اشاره شده است. دانش آموزان در کتاب ریاضی دهم مبحث مجموعه‌ها را کامل‌تر فرا خواهند گرفت.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل مجموعه‌ها، علاوه بر اینکه منظومه شمسی به عنوان یک مجموعه معرفی شده است، که در تعبیر ذکر شده برای مجموعه‌ها کاملاً صدق می‌کند، (اعضاء غیر تکراری و کاملاً مشخص) توجه دانش‌آموزان را به عظمت خلقت معطوف داشته و توسط آیه‌ای از آیات قرآن کریم، هدفمند بودن این خلقت را متذکر می‌شویم.

دانستنی‌هایی برای معلم

نظریه مجموعه‌ها توسط جرج کانتور در سال ۱۸۷۳ پایه‌ریزی و در ابتدا به صورت شهودی و غیرصوری بیان و گسترش یافت.

امروزه نظریه مجموعه‌ها به عنوان مبانی و یکی از پایه‌ای‌ترین مفاهیم در ریاضیات به کار می‌رود. اصلی‌ترین موضوع‌ها در ریاضیات، مانند اعداد و توابع براساس مجموعه‌ها پایه‌ریزی و پیشرفت کرده‌اند.

دو پارادکس معروف در نظریه مجموعه‌ها وجود دارد که یکی متعلق به خود کانتور است و به پارادکس کانتور معروف است و دیگری پارادکس راسل که توسط راسل به دست آمده است.

پارادکس کانتور: اگر U مجموعه همه مجموعه‌ها فرض شود واضح است که عدد اصلی این مجموعه باید بزرگ‌ترین عدد اصلی مجموعه‌های موجود باشد یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد باید همواره $|A| \leq |U|$ اما از طرفی بنابر قضیه کانتور عدد اصلی مجموعه توانی U (مجموعه شامل همه زیر مجموعه‌های U) کوچک‌تر از عدد اصلی U است و این تناقض است.

پارادکس راسل: مجموعه $\{A \mid A \text{ عضو خودش نباشد}\}$ را در نظر می‌گیریم (مجموعه همه مجموعه‌هایی که عضوی از خود نباشند) آیا $R \in R$ است؟

* اگر $R \in R$ در این صورت بنابر تعریف مجموعه R باید $R \notin R$ که تناقض است!

* اگر $R \notin R$ لذا بنابر تعریف مجموعه R باید $R \in R$ که تناقض است!

منطق فازی (Fuzzy logic) که اولین بار توسط پروفیسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵م و به دنبال تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی، پایه‌ریزی و ابداع گردید، امروزه در بسیاری از شاخه‌های ریاضی و علوم غیر ریاضی کاربرد دارد.

منطق فازی از فضای بین دو ارزش «بروم» یا «نروم» ارزش‌های جدید «شاید بروم» یا «می‌روم اگر» یا «احتمال دارد بروم» را استخراج کرده و به کار می‌گیرد. یک چراغ فقط به دو وضعیت «روشن» یا

«خاموش» محدود نیست و مواردی مانند «کم نور» یا «پرنور» نیز برای یک لامپ تعریف می شود!

مفهوم مجموعه های فازی در مقابل مجموعه های قطعی (Crisp sets) قرار دارد در واقع از تعمیم و گسترش مفهوم مجموعه های قطعی به مفهوم مجموعه های فازی می رسیم.

مجموعه های قطعی همان مجموعه های عادی و معمولی هستند که در کتاب های درسی آنها را مجموعه می نامیم. در مجموعه های فازی مفهوم عضویت نسبی است و فقط به عضو بودن یا نبودن محدود نمی شود!

معرفی منابع برای معلمان

- مبانی ریاضیات گسسته، تألیف حمیدرضا امیری و یدا... ایلخانی پور، انتشارات مدرسه
- دانشنامه ریاضی، تألیف گروه نویسندگان، پرویز شهریاری، غلامرضا یاسی پور و... انتشارات کانون فرهنگی آموزش
- نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن، تألیف تی. لین، یو - فنگ لین، ترجمه عمید رسولیان، مرکز نشر دانشگاهی

نمونه سؤال های ارزشیابی

- ۱- متناظر با هر عبارت یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه یک عبارت بنویسید.
 - الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج و اول
 - ب) مجموعه مثلث هایی که ۴ ضلع دارند.
 - ج) مجموعه اعداد صحیح منفی و بزرگ تر از ۲
 - د) مجموعه اعداد طبیعی و کوچک تر از ۷
 - هـ) $A = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \}$
 - و) $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11 \}$
- ۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) $\{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \} \}$ دارای عضو است

ب) عبارت «۵ عدد اول و کوچک تر از ۲» مجموعه ای مشخص و یکتا را

ج) مجموعه اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ مجموعه نامیده می شود.
- ۳- هر یک از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) $A = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

ب) $B = \{ 5, 6, 7, \dots \}$

ج) $C = \{7\}$

د) $D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$

۴- هر یک از مجموعه‌های زیر که با نماد ریاضی مشخص شده‌اند را با اعضایشان بنویسید.

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 5 < x < 11\}$ ب) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x < 7\}$

ج) $C = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 9 \right\}$ د) $E = \{3K \mid k = -1, -2, -3\}$

۵- همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A = \{\emptyset, \emptyset, 2\}$ را بنویسید.

۶- اگر $A = \{1, 2, 3, \{1\}, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است.

الف) $\{1\} \in A$ ب) $\{1\} \subseteq A$ ج) $\{2, 3, \{2\}\} \subseteq A$

د) $\{4, 5\} \subseteq B$ هـ) $A \not\subseteq B$ و) $\{1, \{1\}, 2\} \subseteq A$

ز) $7 \in A$ ح) $\{4\} \subseteq A$ ط) $\{4\} \subseteq B$

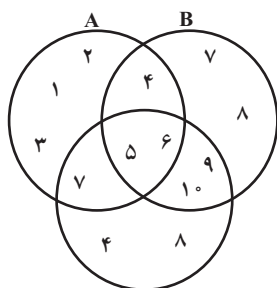
۷- سه مجموعهٔ $A = \{4, 6, 7, 8, 9, 2\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ و $C = \{3, 4, 5, 9, 10\}$ را

در نظر گرفته و هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید.

الف) $(A \cap B) \cap C$ ب) $(A \cup B) \cap C$ ج) $(A \cup C) - B$

د) $(A - B) \cup (B - C)$ هـ) $(A - B) \cup (A - C)$ و) $A - (B \cap C)$

ز) $(A \cup C) - B$ ح) $(A - B) \cup (C - B)$



۸- با توجه به نمودار زیر حاصل هر یک از عبارت‌های زیر

را بنویسید.

الف) $(A - B) \cup (B - A)$

ب) $(A \cup C) - B$

ج) $A \cup (B \cap C)$

د) $(A \cup B) \cup C$

هـ) $A \cap (B \cup C)$

و) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ز) $(A - B) - C$

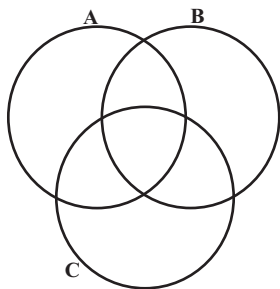
ح) $A - (B - C)$

ط) $(A \cap C) - B$

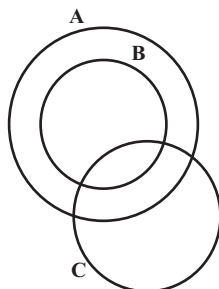
ی) $(A - B) \cap (C - B)$

ک) $(A \cap B) \cap C$

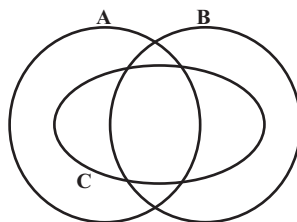
۹- در هر یک از شکل‌های زیر، مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



$$(A - B) \cup C$$



$$(A - B) \cup (B \cap C)$$



$$(A \cap C) - (C - B)$$

اهداف

- درک دقیق و شفافی از واژهٔ مجموعه در ریاضیات داشته باشد.
- دو ویژگی مهم اعضای یک مجموعه یعنی تکراری نبودن و مشخص بودن را درک کند.
- از نمودار ون برای نمایش مجموعه‌ها استفاده کند.
- مفهوم عضویت را درک کند.
- مفهوم مجموعهٔ تهی را درک کرده و بتواند برای مجموعهٔ تهی مصداق پیدا کند.
- بتواند بیان توصیفی برای یک مجموعه را به مجموعه‌ای با اعضای کاملاً مشخص تبدیل کند و برعکس برای مجموعه‌ها بیان توصیفی شفافی بیاورد.

روش تدریس

هدف فعالیت اول این درس لزوم استفاده از مفهوم مجموعه و نماد مجموعه است. اینکه دانش‌آموز احساس نیاز کند که گاهی اوقات لازم است تعدادی از اشیاء را از بقیه جدا کنیم و یا آنها را متمایز کرده و دسته‌بندی کنیم.

در این فعالیت علاوه بر هدف فوق‌الذکر دانش‌آموز یاد می‌گیرد که برای مشخص کردن یک مجموعه از اشیاء، از حروفی چون $A, B, C, \dots$ استفاده کرده و این اشیاء را در دو آکلاด قرار داده و به هر کدام از آن اشیاء یک عضو بگوید.

در این فعالیت سعی بر این است تا دانش‌آموز درک کند و به این موضوع پی ببرد که اولاً توصیف برای مشخص کردن هر مجموعه باید کاملاً روشن و شفاف بوده و مجموعه‌ای یکتا معرفی کند و دوم اینکه جابه‌جایی اعضای مجموعه، مجموعهٔ جدیدی تولید نمی‌کند به عنوان مثال عبارت «۳ عدد اول و یک رقمی» به صورت‌های مختلفی می‌تواند تعبیر شود: $\{2, 3, 5\}$ یا $\{2, 5, 7\}$ یا ... لذا این عبارت نمی‌تواند مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه باشد.

در پاراگراف انتهایی این صفحه، تعبیر دقیق ریاضی برای مجموعه بیان شده و دانش‌آموز باید تفاوت آن را با کلمهٔ مجموعه که در زبان محاوره‌ای به کار می‌رود درک کند. توجه داشته باشید که در معرفی مجموعه، قید شده است دسته‌ای از اشیاء مشخص و هیچ محدودیتی برای این اشیاء بیان نشده است. به عبارت دیگر اینکه اعضای یک مجموعه باید دارای یک ویژگی یا خاصیت مشترک باشند یا

هم جنس باشند یا ... جزء شرایط تشکیل یک مجموعه نیست بنابراین مجموعه $\{a, b, 2, 3\}$ خورشید $A =$ یک مجموعه ۵ عضوی به حساب می آید که اعضای آن هیچ ویژگی مشترکی ندارند.

در فعالیت های صفحه ۳ علاوه بر معرفی مفهوم و نماد عضویت و نمایش مجموعه ها با استفاده از نمودار ون، روی تکراری نبودن اعضای یک مجموعه و مشخص بودن اعضا تأکید شده است. توجه داشته باشید که برای استفاده از نمودار ون هم می توانیم از منحنی های بسته استفاده کنیم و هم از خط شکسته بسته از قبیل اشکال هندسی شناخته شده مانند دایره، مستطیل و ...

در ابتدای صفحه ۴، مجموعه تهی به عنوان مجموعه ای که فاقد عضو است معرفی شده و با تذکر این نکته که مجموعه تهی یعنی $\{\}$ یا $\emptyset$ با مجموعه های $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset\}$ یکی نیست از اشکالات و بدفهمی های دانش آموزان جلوگیری شده است.

در کار در کلاس صفحه ۴ سعی می شود تا مفاهیم و مطالب قبلی بهتر جا بیفتد و دانش آموزان در این کار در کلاس مجموعه تهی را به عنوان یک مجموعه و همچنین مجموعه های یک عضوی را به عنوان یک مجموعه شناسایی و خودشان قادر به معرفی چنین مجموعه هایی شوند. در کار در کلاس شماره ۴ تمرین بسیار خوبی برای درک و تعمیق مطالب بیان شده است.

دانش آموزان با خواندن عبارت ها و مجموعه های سمت چپ ابتدا مجموعه را در ذهن خود ساخته و سپس به دنبال آن در ستون سمت راست، می گردند. کار در کلاس شماره پنج مجدداً تأکید بر مشخص بودن اعضا دارد.

تمرین صفحه ۵، مطالب این درس را دوره کرده و تأکید بیشتری روی بیان مجموعه هایی با عبارات و با نمادهای ریاضی دارد.

تمرین ۳ یک مسئله پاسخ باز است که دانش آموزان به آن جواب های متفاوتی خواهند داد و با کنترل جواب های آنها به نوع نگاه و سطح درک آنها از مجموعه پی خواهید برد.

اهداف

– دانش‌آموزان مفهوم برابری و مفهوم زیرمجموعه در مجموعه‌ها را درک کرده و تشخیص می‌دهند که در چه صورتی دو مجموعه برابر نیستند و در چه صورتی $A \subseteq B$.

– دانش‌آموزان ارتباط دوطرفه مفهوم برابری و زیرمجموعه بودن را درک می‌کنند.

– زیر مجموعه‌های بدیهی هر مجموعه ($\emptyset$ و خود مجموعه) معرفی می‌شوند.
– دانش‌آموزان باید بتوانند تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را تشخیص داده و بنویسند.

– نمایش مجموعه‌های اعداد معروف و نمادگذاری آنها و همچنین استفاده از نماد ریاضی برای نمایش مجموعه‌ها جزء اهداف آموزشی این درس است.
– دانش‌آموزان باید بتوانند مجموعه‌هایی که با اعضا مشخص شده‌اند یا با یک عبارت توصیفی بیان شده‌اند را با استفاده از نمادهای ریاضی مشخص کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۶ دانش‌آموزان دو مجموعه A و B را می‌سازند (تشخیص می‌دهند) که این مجموعه‌ها به دو صورت معرفی شده‌اند و مشاهده می‌کنند که تمام اعضای A در B و تمام اعضای B نیز در A بوده و در واقع $A=B$ است. سپس با معرفی مجموعه A و نوشتن اعضای آن در عبارت‌های تعریف شده در الف، ب و ج به دنبال مجموعه‌ای برابر با A می‌گردند.

و در همین فعالیت با مفهوم نابرابری در مجموعه‌ها نیز آشنا می‌شوند و جلوی این بدفهمی که «اگر A با B برابر نباشد تمام اعضای A نباید در B باشند» گرفته می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۶ دانش‌آموزان با مقایسه عضو به عضو و اضافه کردن یک عضو، برابری در دو مجموعه را ایجاد می‌کنند. در سؤال ۲ کار در کلاس یک مسئله باز پاسخ مطرح شده که تنوع پاسخ‌های دانش‌آموزان را در برخواهد داشت که البته بسیاری از این پاسخ‌ها قابل تأمل خواهد بود.

فعالیت صفحه ۷ به مفهوم زیرمجموعه می‌پردازد و نیز به زیرمجموعه‌های بدیهی هر مجموعه مانند A یعنی به معرفی $\emptyset$ و A به عنوان زیرمجموعه‌های A و البته با بیان این مطلب که در چه شرایطی $A \not\subseteq B$ به نوعی زیرمجموعه بودن تهی را اثبات می‌کند (نوعی برهان خلف).

ذکر مثال بالای صفحه ۸ و آوردن دلیل برای هر مورد برای تعمیق و تثبیت مفاهیم زیرمجموعه— بودن و زیرمجموعه نبودن بسیار مفید است. در کار در کلاس صفحه ۸ مفاهیم زیرمجموعه، عضویت و زیرمجموعه نبودن از طریق استفاده از نمودار ون و شهودی کردن این مفاهیم و از طریق مجموعه‌های عددی بررسی می‌شود.

بهتر است از دانش‌آموزان خواسته شود تا برای نوشتن زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به ترتیب از مجموعه هیچ عضوی (تهی) شروع کرده و بعد تمام یک عضوی‌ها و دو عضوی‌ها و ... را بنویسند.

در مطالب صفحه ۹ سعی بر این است تا دانش‌آموزان مجموعه‌های عددی را بتوانند با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسند و برعکس. به عنوان مثال مجموعه $A = \{4, 7, 10, \dots\}$ با مجموعه $B = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ برابر است. همچنین مجموعه $\{k \in \mathbb{Z} \mid -2 < k \leq 3\}$ با مجموعه $\{-7, -3, 1, 5, 9, 13\}$ برابر است.

در کار در کلاس صفحه ۱۰ علاوه بر اینکه دانش‌آموز مجموعه‌هایی را که با نماد ریاضی مشخص شده یا با عبارتی بیان شده‌اند را باید با اعضایشان مشخص کند به لزوم استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان مجموعه‌ها پی می‌برد زیرا مجموعه اعداد گویا را نمی‌توانیم با همه اعضایش بنویسیم. در تمرین صفحه ۱۰ همه مفاهیم ذکر شده در این درس مورد سؤال و پرسش قرار می‌گیرد و دوره می‌شود.

اهداف

- دانش‌آموزان با ۳ عمل از اعمال بین مجموعه‌ها یعنی عمل اجتماع، عمل اشتراک و عمل تفاضل آشنا می‌شوند.
- دانش‌آموزان سه عمل مذکور را به صورت نمادگذاری ریاضی و نمودار ون درک می‌کنند.
- دانش‌آموزان با معرفی دو مجموعه A و B (به صورت نمایش همه اعضا یا نمودار ون) باید بتوانند $(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$ ، $(A - B)$ ، $(B - A)$ را بنویسند.
- دانش‌آموزان عدد اصلی مجموعه‌ها یا تعداد اعضای مجموعه‌ها را تشخیص داده و از نماد $n(A)$ برای نمایش تعداد اعضای A استفاده می‌کنند.

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۱۱، ابتدا دانش‌آموزان به صورت غیر رسمی و غیر صوری با مفاهیم اشتراک و اجتماع آشنا شده و سپس در دو کادر پایین صفحه این دو مفهوم یا دو عمل بین مجموعه‌ها را به دو صورت استفاده از نمادهای ریاضی و استفاده از نمودار ون درک می‌کنند.

مثال بالای صفحه ۱۲ به درک بهتر این مطالب می‌پردازد و به صورتی کاملاً عملی دانش‌آموز را درگیر محاسبه اشتراک و اجتماع دو مجموعه می‌کند.

فعالیت صفحه ۱۲ فعالیتی بسیار غنی و خلاقانه است و هدف اصلی از طرح این فعالیت آن است که دانش‌آموز مفهوم اجتماع را با این گزاره که «اگر عضوی حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد در اجتماع آن دو مجموعه است» بهتر درک کند در ادامه این فعالیت از دانش‌آموز خواسته شده تا حالت‌های دیگری برای این دو مجموعه بیابد که تعداد کل حالت‌های ممکن و صحیح برای A و B عبارت از ۸ حالت که دانش‌آموزان باید همه حالت‌ها را بیابند.

در شماره ۲ فعالیت صفحه ۱۲ به طور مشابه، اول به صورت غیر رسمی با مفهوم عمل تفاضل آشنا شده و سپس در کادر بالای صفحه ۱۳ تعریف ریاضی و نمودار ون برای عمل تفاضل آورده شده که ذکر یک مثال در پایین کادر دانش‌آموزان را به صورت عملی درگیر محاسبه تفاضل دو مجموعه کرده و در عین حال دانش‌آموز مشاهده می‌کند که $(A - B)$ با $(B - A)$ لزوماً برابر نیست.

در کار در کلاس صفحه ۱۳ به تعمیق و تا حدودی به تعمیم مفاهیم ذکر شده پرداخته‌ایم و در پایین صفحه یک نماد یا قرارداد برای نمایش تعداد اعضای یک مجموعه آورده شده است. برای

دست‌ورزی بیشتر و تعمیق مفاهیم اجتماع، اشتراک و تفاضل می‌توانید از مثال‌های متنوعی مانند مثال زیر کمک بگیرید :

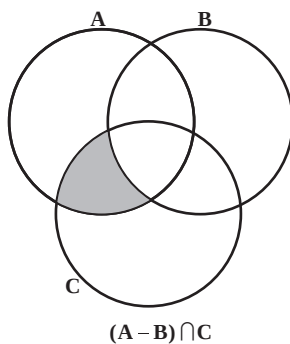
۱- اگر $A-B=\{2,3,4\}$ و $B=\{9,8,7\}$ برای A چند حالت وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۲- اگر $A-B=\{5,6,2\}$ و $A \cup B=\{5,6,2,9,11,15\}$ با استفاده از نمودار ون ۴ حالت برای A و B مشخص کنید.

در تمرین‌های صفحه ۱۴ همه مطالب و مفاهیم ذکر شده در این درس را مرور کرده و به تثبیت آنها می‌پردازیم.

در تمرین ۲ قسمت‌های (ه) و (و) به این نکات پرداخته شده است که لزوماً $A-B$ و $B-A$ ممکن است با هم برابر نبوده و همین‌طور تعداد اعضای آنها که البته در حالت‌هایی می‌توانند برابر هم باشند ولی حکم کلی نبوده و البته اگر $(B-A)=(A-B)$ آنگاه واضح است که $n(B-A)=n(A-B)$ ولی برعکس این مطلب درست نیست یعنی اگر $n(B-A)=n(A-B)$ باشد نمی‌توان همواره نتیجه گرفت که $B-A=A-B$ به عنوان مثال اگر فرض کنید $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{6,8,3,5\}$ واضح است که $A-B=\{2,4\}$, $B-A=\{3,5\}$ که $(A-B) \neq (B-A)$ ولی تعداد اعضای آنها برابر است.

تمرین ۴ الگوهای بسیاری را برای هاشورزدن به دانش‌آموزان معرفی می‌کند. به عنوان مثال :



اهداف

- یادآوری مفهوم احتمال و رابطه محاسبه احتمال یک پیشامد تصادفی
- استفاده از نمادهای ریاضی برای محاسبه احتمال در مسائل مربوطه
- ارتباط بین مجموعه همه حالت‌های ممکن (فضای نمونه‌ای) و زیر مجموعه‌های آن به عنوان پیشامدهای تصادفی
- یادآوری مفهوم پیشامدهای هم‌شانس و غیر هم‌شانس

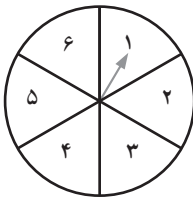
روش تدریس

در اولین مثال (صفحه ۱۵) هدف اصلی تشکیل مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن یعنی $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و در هر چهار قسمت الف، ب، ج و د تشکیل مجموعه‌های حالت‌های مطلوب است. استفاده از نمادهای ریاضی و فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال نیز از اهداف حل این مثال می‌باشد.

در قسمت (ج) توجه دارید که پیشامد مورد نظر مجموعه‌ای فاقد عضو یعنی $\emptyset$ است و $n(\emptyset) = 0$ و بنابراین $p(\emptyset) = 0$ است.

در فعالیت صفحه ۱۶ دانش‌آموز باید پس از تشخیص همه حالت‌های ممکن یعنی $S = \{1, 2, 3\}$ برای هر کدام از زیرمجموعه‌های S یا پیشامدهای تصادفی که به صورت مجموعه‌ای از اعداد تعریف شده است، با بیان توصیفی و مانند نمونه یک پیشامد تعریف کند. به عنوان یک فعالیت تکمیلی از فعالیت زیر استفاده کنید.

فعالیت



مانند نمونه و با توجه به چرخنده مقابل برای هر یک از مجموعه‌های تعریف شده یک پیشامد با بیان توصیفی تعریف کنید و سپس احتمال آن را به دست آورید.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ (عقربه روی اعداد کوچک‌تر از ۵ بایستد)} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$B = \{1, 5, 6\} \rightarrow (\text{عقربه روی عدد ۱ یا ۵ یا ۶ بایستد}) \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6}$$

$$C = \{2, 3, 5\} \rightarrow (\quad) \rightarrow P(C) =$$

$$D = \{3, 6\} \rightarrow (\quad) \rightarrow P(D) =$$

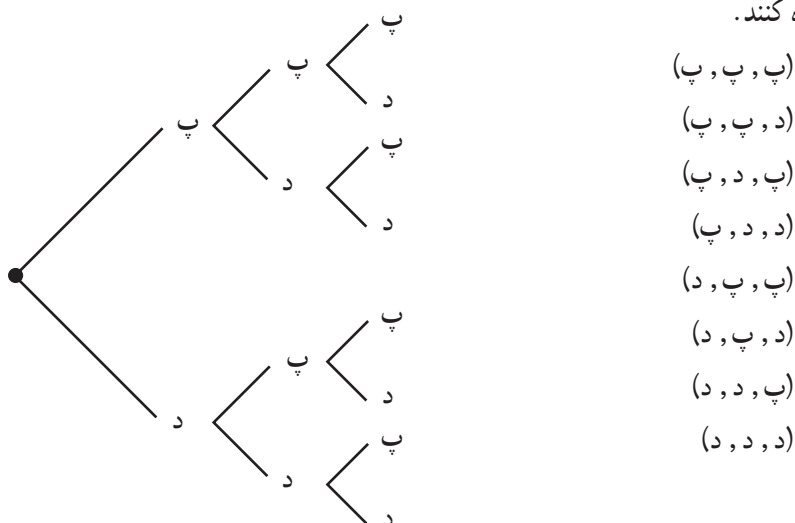
$$E = \{1, 4\} \rightarrow (\quad) \rightarrow P(E) =$$

توجه داشته باشید که توصیف‌هایی که دانش‌آموزان برای تعریف یک پیشامد معین استفاده می‌کنند، ممکن است با هم فرق داشته باشد ولی صحیح باشند.

در فعالیت صفحه ۱۶ موضوع پیشامدهای هم‌شانسی نیز مطرح شده که یادآوری از سال‌های قبل است و دانش‌آموز صرفاً از روی عدد حاصل از محاسبه احتمال پیشامدهای پی می‌برد که هم‌شانسی هستند یا غیر هم‌شانسی. کار در کلاس صفحه ۱۶ به خوبی همه اهداف و مفاهیم ذکر شده را مرور کرده و باعث تعمیق آنها می‌شود. در این کار در کلاس و در قسمت (ب) یک سؤال باز پاسخ مطرح شده است و دانش‌آموزان در می‌یابند که هر زیرمجموعه از S یا هر پیشامد تصادفی که شامل ۴ عضو باشد، می‌تواند پاسخ این سؤال باشد.

در تمرین‌های آخر این فصل (صفحه ۱۷) ۲ تمرین شماره ۲ و شماره ۴ نیاز به توجه خاص دارد و به طور حتم باید توسط شما بررسی شود و راه‌حل‌های دانش‌آموزان را مشاهده کرده و در صورت نیاز این دو تمرین در کلاس تحلیل شود.

بهتر است برای حل تمرین ۲، نمودار درختی رسم شود تا دانش‌آموزان تمام ۸ حالت ممکن را مشاهده کنند.



در تمرین ۴ نیز بهتر است همهٔ حالت‌ها را در یک جدول 6×6 مشاهده کنند.

		تاس قرمز					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
تاس آبی	۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
	۲	(۲,۱)	(۲,۲)	...	...	...	(۲,۶)
	۳	(۳,۱)	...	...	...	...	(۳,۶)
	۴	(۴,۱)	...	...	(۴,۴)	...	(۴,۶)
	۵	(۵,۱)	...	...	(۵,۴)	...	(۵,۶)
	۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

این توجه داده شود که $(۶,۵)$ با $(۵,۶)$ فرق دارد و دو حالت مجزا هستند. $(۶,۵)$ یعنی تاس آبی ۶ آمده و تاس قرمز ۵ و $(۵,۶)$ یعنی تاس آبی ۵ و تاس قرمز ۶ آمده است.

حل تمرین‌های

تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) $A = \{۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ۱۲۵\}$ مکعب عددهای طبیعی از یک تا پنج - A مجموعه‌ای ۵ عضوی است

ب) $C = \{۱۰\}$ مجموعه اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ - مجموعه C ، ۱ عضو دارد
ج) عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ $\{۳, ۶, ۹, \dots, ۹۹۹\}$ - این مجموعه، ۳۳۳ عضو دارد

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ $\{\}$ - این مجموعه، بدون عضو است.
ه) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. $\{\}$ - این مجموعه، بدون عضو است.
و) عددهای اول دورقمی که مضرب ۷ باشد. $\{\}$ - این مجموعه، بدون عضو است.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.
الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.
ب) مجموعه $\{۲, ۳, ۴, \dots, ۹\}$ دارای ۸ عضو است.
ج) مجموعه $A = \{۰, \emptyset\}$ دارای ۲ عضو است.
د) با توجه به مجموعه $A = \{۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ ؛ داریم: ۵، عضو A است یا با نماد ریاضی، $۵ \in A$ و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی، $۱۲ \notin A$.

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

$$A = \{۲, ۳, ۵, ۷\} \quad B = \{۲, ۴, ۶, ۸\} \quad C = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$$

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟ B و C

$$B = \{x | x \in A, x^2 \leq 2\} \quad , \quad C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\} \quad , \quad D = \{x | x \in A, x^2 = 1\}$$

$$B = \{-1, 0, 1\} \quad C = \{-1, 0, 1\} \quad D = \{-1, 1\}$$

۲- سه مجموعه مانند A, B, C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه

گرفت $A \subseteq C$ ؟ بله

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 2, 3\} \quad C = \{1, 2, 3, 4\}$$

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

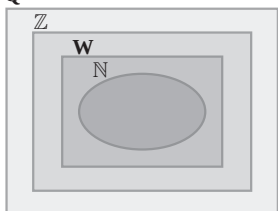
$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\} \quad \text{الف)} \quad B = \{2x | x = 0, 2, 3\} \quad \text{ب)}$$

$$A = \{1\} \quad \text{زیرمجموعه‌ها: } \{\}, \{1\}$$

$$\text{زیرمجموعه‌ها: } \{0, 4, 6\}, \{0, 4\}, \{0, 6\}, \{4, 6\}$$

$$B = \{0, 4, 6\} \quad \text{زیرمجموعه‌ها: } \{\}, \{0\}, \{4\}, \{6\}$$

Q



۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q, W, N و

$\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$

با هم مقایسه کنید.

$$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q$$

۵- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید:

الف) $\frac{2}{3} \notin W$ هر عدد گویا عددی حسابی است. $\times$ ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. $\checkmark$

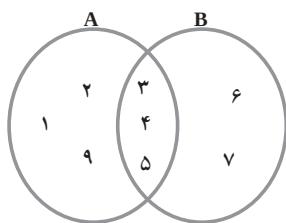
ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. $\checkmark$ د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. $\checkmark$

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$
 هـ) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $(A \cup B) - C$
 ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset = \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

- الف) $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ و) $C - B = \{8, 10, 11\}$
 ب) $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ز) $(A - C) \cup (B - C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
 ج) $A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ ح) $(A \cup B) - C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
 د) $A \cap B = \{9\}$ ط) $A \cap A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
 هـ) $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$ ک) $B \cup B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$
 ل) $C \cup \emptyset = \{1, 7, 8, 10, 11\}$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با $\checkmark$ و گزاره‌های نادرست را با $\times$ مشخص کنید :



- الف) $\checkmark$ $B - A = \{6, 7\}$ ب) $\checkmark$ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
 ج) $\times$ $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$
 د) $\checkmark$ $n(A \cup B) = 8$
 هـ) $\times$ $A - B = B - A$ و) $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

- ۱) B ۲) A ۳) اجتماع
 ۴) زیرمجموعه ۵) $(A \cup B)$

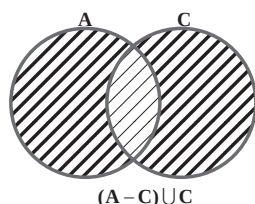
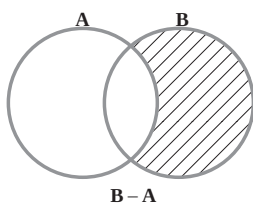
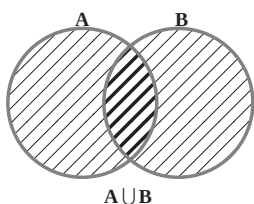
الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.

ب) هریک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه $A \cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هریک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه A است.

هـ) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه B مساوی است.
 ۴- در هریک از شکل‌های زیر مجموعه موردنظر را هاشور بزنید.



تمرین

۱- اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

(الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. $\frac{1}{6}$ (د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 ۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید
 (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د، د، پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این
 خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟

$\{(د، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د)، (د، پ، پ)، (پ، د، د)، (پ، د، پ)، (پ، پ، د)، (پ، پ، پ)\}$

کل حالت‌ها ۸ حالت است.

$\frac{3}{8}$ = احتمال اینکه خانواده دقیقاً دو دختر داشته باشد.

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی
 از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

(الف) این مهره آبی باشد. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (ب) این مهره سبز نباشد. $\frac{7}{12}$

(ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :
 (اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = 36$)

الف) هر دو بار، عدد اوّل رو شود. $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد شمارش

کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین
مفاخر تاریخ ایران به شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط
چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی حقیقی و گنگ است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار
محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در
ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

نگاه کلی به فصل

در این فصل دانش‌آموزان با اعداد گنگ، اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، نام مجموعه‌های اعداد حقیقی و گنگ و مفهوم قدر مطلق آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در سال گذشته با اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ آشنا شده‌اند ولی مجموعه‌ای که این اعداد در آن قرار دارند را نام‌گذاری نکرده‌اند. در این فصل با نام این مجموعه که به صورت Q^c یا Q' می‌باشد و نام مجموعه اعداد حقیقی که به صورت IR می‌باشد آشنا می‌شوند.

با یادآوری مجموعه اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا پلی برای رسیدن به اعداد گنگ (اصم) و در نهایت مجموعه اعداد حقیقی ایجاد می‌شود و این پل توسط فعالیت‌های صفحه ۱۹ و ۲۱ ساخته شده است. در فعالیت صفحه ۲۱ نمایش اعشاری و تقریب اعشاری اعداد گویا مطرح می‌شود که پل ارتباطی برای رسیدن به اعداد حقیقی است و در فعالیت صفحه ۲۴، عددهای گنگ یا اصم معرفی می‌شوند و در فعالیت بعدی نشان داده می‌شود که با وجود اینکه بین هر دو عدد گویا می‌توان بی‌شمار عدد گویای دیگر به دست آورد ولی عددهایی نیز بین هر دو عدد گویا وجود دارند که گویا نیستند پس تمام اعداد گویا را نمی‌توان به صورت یک خط بر روی محور نشان داد.

در واقع هدف اصلی که در این فصل دنبال می‌شود آن است که دانش‌آموزان به این مفهوم پی ببرند که مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح را توانستیم به ترتیب به صورت $\{1, 2, 3, \dots\}$ و $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ یعنی به صورت اعضا نمایش دهیم.

ولی با توجه به اینکه بین هر دو عدد گویا، عدد گویای دیگری وجود دارد نمی‌توانیم مجموعه Q را به صورت اعضا نشان دهیم پس به صورت $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ نشان می‌دهیم. مجموعه اعداد حقیقی را نمی‌توانیم به صورت نمادین یا بیان ریاضی نشان دهیم پس ناچاریم آن را روی محور و به صورت یک خط نمایش دهیم و از طرفی زیر مجموعه‌های IR معمولاً به صورت پاره خط یا نیم خطی روی محور خواهند بود.

در این فصل محاسبات اعداد گویا کامل می‌شود و دانش‌آموزان با تقریب اعشاری و نمایش اعشاری اعداد گویا آشنا می‌شوند و از آن برای مرتب کردن اعداد گویا استفاده خواهند کرد.

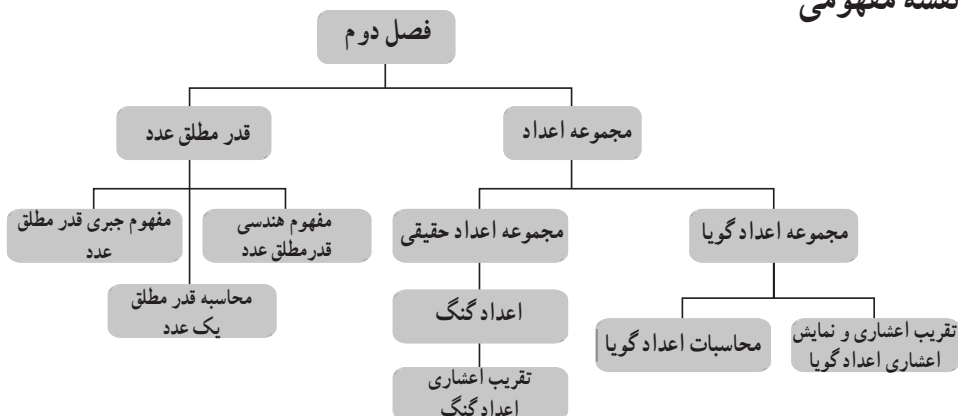
آشنایی با مفهوم هندسی قدر مطلق و تعریف جبری آن از اهداف دیگر این فصل می‌باشد. همان‌طور که می‌دانید معرفی این نماد به ما کمک می‌کند تا بتوانیم بعضی از مفاهیم را به درستی انتقال دهیم.

برای مثال برای اینکه برای دانش‌آموزان توضیح دهیم چرا علامت حاصل $-2 = -2 + 4$ منفی

می‌شود خواهیم گفت: عدد ۲ را از ۴ کم می‌کنیم و علامت عددی که قدر مطلق آن بزرگ‌تر است را می‌گذاریم.

در کل در این فصل مانند فصول دیگر سعی می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند عبارات فارسی را به زبان ریاضی و برعکس بنویسند و بیان کنند.

نقشه مفهومی

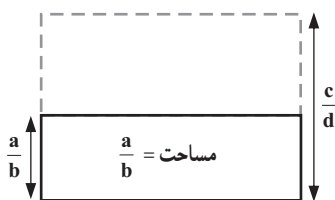


تصویر عنوانی

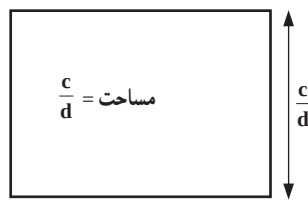
عدد π یک عدد حقیقی است که در محاسبه محیط و مساحت دایره به کار می‌رود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی تا ۱۶ رقم بعد از اعشار عدد π را به دست آورد. تاکنون تا بیش از یک میلیون رقم بعد از اعشار عدد π به کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری به دست آمده است. البته برای محاسبات روزمره و محاسبه محیط و مساحت دایره تا دو رقم بعد از اعشار عدد π کافی است.

دانستنی‌هایی برای معلم

۱- اگر a, b, c, d اعداد حقیقی مثبت باشد و $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ باشد $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ قرار دارد.

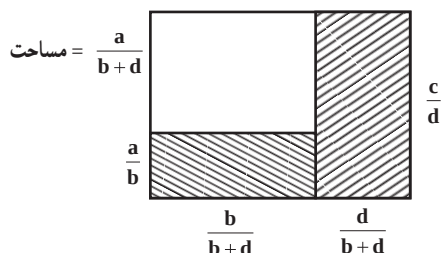


شکل (۱)



شکل (۲)

اکنون طول مستطیل شماره (۱) را به دو قسمت $\frac{b}{b+d}$ و $\frac{d}{b+d}$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $\frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} = 1$) در نتیجه به شکل زیر خواهیم رسید.



می‌دانیم مساحت شکل (۳) از مساحت شکل (۱) بیشتر و از مساحت شکل ۲ کمتر است.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ پس } \frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

۲- عدد پی (π) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. π یکی از حروف یونانی است. اولین محاسبه عدد π توسط ارشمیدس و با کمک چندضلعی‌ها انجام شد او با ۹۶ ضلعی منتظم عدد π را بین دو کسر $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{1}{4}$ به دست آورد. لودلف وان کولن آلمانی در قرن هفدهم به کمک ۳۲۲۱۲۲۵۴۷۲۰ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۳۲ رقم بعد از اعشار محاسبه کرد. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب رساله محیطیه π را تا ۱۶ رقم پس از اعشار حساب کرده است.

ساده‌ترین راه حل محاسبه π از تقسیم محیط دایره به قطر دایره محاسبه می‌شود یعنی

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

شما می‌توانید به کمک دایره به شعاع واحد و رسم ۸ ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره مقدار عددی π را تقریب بزنید.

$$3 < \pi < 3.14159$$



اگر به جای ۸ ضلعی منتظم از ۱۲ ضلعی منتظم محیطی و محاطی استفاده کنیم. $3/215 < \pi < 3/1058$ به جدول زیر توجه کنید.
شعاع دایره‌ها $R=1$ می‌باشد.

n	محیط n ضلعی منتظم محاطی	محیط n ضلعی منتظم محیطی
۶	۳	۳/۴۶۴۱
۱۲	۳/۱۰۵۸	۳/۲۱۵۴
۲۴	۳/۱۳۲۶	۳/۱۵۹۶
۴۸	۳/۱۳۹۳	۳/۱۴۶۰
۹۶	۳/۱۴۱۴	۳/۱۴۱۶

از کسرهای زیر نیز می‌توان مقدار تقریبی عدد π را محاسبه کرد.

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^3} + \frac{49}{60^2} = 3/1416156$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}{1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times \dots}$$

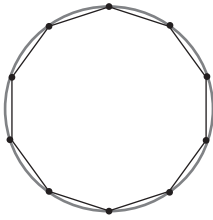
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

روز ۱۴ مارس روز جهانی عدد π نام‌گذاری شده است زیرا مارس سومین ماه میلادی است.

سرچشمه عددهای حقیقی

از میان همه دانش ریاضی که به فیثاغورث نسبت داده می‌شود، مهم‌ترین آن این است که از قضیه فیثاغورث چنین برمی‌آید که همه مقادیر را نمی‌توان با عدد صحیح بیان کرد. طول قطر مربع و مستطیل، ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، اضلاع مثلث قائم الزاویه نمونه‌هایی هستند که در اکثر مواقع عددی غیر صحیح خواهند بود. مثلاً اگر مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم طول قطر آن $\sqrt{8}$ خواهد شد. اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{10}$ و $\sqrt{1/5}$ و ... را عدد گنگ (اصم) می‌نامیم و مجموعه اعداد حقیقی از اجتماع اعداد اصم و اعداد گویا به دست می‌آید یعنی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مسیرهایی برای توسعه



۱- از دانش‌آموزان بخواهید روش‌هایی برای محاسبه عدد π به دست آورند. مثلاً آنها می‌توانند یک دایره رسم کنند و توسط سوزن ته‌گرد داخل آن یک چند ضلعی محاط کنند در واقع نخ‌ها را دور سوزن‌ها بچرخانند. سپس به کمک محیط چند ضلعی که به راحتی قابل اندازه‌گیری

است و تقسیم این محیط بر قطر دایره مقداری تقریبی برای عدد π به دست آورند. $\pi = \frac{2\pi R}{2R}$ بدیهی است که هر چه تعداد ضلع‌های چند ضلعی بیشتر باشد محیط چند ضلعی به محیط دایره نزدیک خواهد بود و تقریب بهتری از π به دست خواهد آمد.

۲- اگر $a, b, c, d > 0$ و $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ باشد نشان دهند که $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ می‌باشد. از دانش‌آموزان بخواهید اثباتی برای این نامساوی ارائه دهند.

۳- از دانش‌آموزان پرسید چرا ۱۴ مارس را روز جهانی عدد π نامیده‌اند؟

استفاده از ابزار فناورانه

۱- دانش‌آموزان می‌توانند از ماشین حساب برای نمایش اعشاری اعداد گویا و تقریب اعشاری جذر عددها استفاده کنند.

۲- شما می‌توانید از سایت www.teamboard.com با توجه به مسیر

www.teamboard.com/software/Teamboard-draw60 نرم‌افزار Teamboard

(را با توجه به windows set up کامپیوترتان) را نصب کنید و از آن در کلاس استفاده نمایید.

معرفی منابع برای معلمان

- بحث ریاضی با دانش‌آموز، مؤلف سرژلانگ، مترجم نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، صفحه ۷ تا ۳۶.

- اثبات بدون کلام، تألیف راجرب. نلسن، مترجم سپیده چمن‌آوا، انتشارات مدرسه، صفحه ۵۲.

- عدد، نوشته آیزاک آسیموف، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی.

- کسرهای مسلسل، نوشته کارل د. اولدز، ترجمه محمد جلوداری ممقانی، انتشارات نشر

دانشگاهی تهران.

• دانستنی‌های اعداد بزرگ، نوشته فیلیپ ج. دیویس، ترجمه علی عمیدی، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.

• اعداد: گویا و گنگ، نوشته ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.

• نامساوی‌ها، نوشته پاول پتروویچ کارولین، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات خوارزمی.
• گزیده‌هایی از نظریه اعداد، نوشته لویستن اور، ترجمه منوچهر وصال، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.

• سیری در عددهای طبیعی، تألیف جلیل الله قراگزلو، انتشارات فاطمی.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- نمایش اعشاری اعداد $\frac{7}{10}$ و $\frac{7}{22}$ و $-\frac{1}{9}$ را به دست آورید.

۲- چه تفاوتی بین نمایش اعشاری عدد $\frac{7}{22}$ و تقریب اعشاری $\sqrt{3}$ وجود دارد؟

۳- سه کسر بین $\frac{13}{12}$ و $\frac{15}{14}$ به دست آورید.

۴- عدد گنگ بین ۲ و ۳ به دست آورید.

۵- با چند مثال نشان دهید که اگر $a < 1$ باشد $a^2 > a$ و اگر $a > 1$ باشد $a^2 < a$...

۶- کسره‌های زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{1}{5} و \frac{8}{11} و -\frac{4}{9} و 2 و -\frac{3}{5} و \frac{7}{9}$$

۷- اگر $a = -\frac{1}{4}$ و $b = -\frac{3}{4}$ و $c = -2$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) |2a - b + c| \quad ۲) |a + b| - |b - c| + |a + c|$$

۸- حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

$$۱) |2 - \sqrt{7}| \quad ۲) |-6 - \sqrt{3}| \quad ۳) |\sqrt{3} - 3\sqrt{5}|$$

۹- اگر $a < 0$ و $b < 0$ و $c > 0$ باشد حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$۱) |a + b| + |ac| \quad ۲) |ab| + |ac|$$

۱۰- عبارات زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{(-259)^2} \quad ۲) \sqrt{189^2} \quad ۳) \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} \quad ۴) \sqrt{(7-\sqrt{2})^2}$$

۱۱- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) \left(2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad ۲) \frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3}} \div \frac{-1 - \frac{3}{4}}{-1 + \frac{3}{4}} \quad ۳) \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3}$$

۱۲- آیا جمع دو عدد گنگ حتماً گنگ است؟

۱۳- زیر اعداد گویا خط بکشید؟

$$-0/5, 0/123, 0/4040040004, \dots$$

۱۴- عدد $2 + \sqrt{7}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۵- عدد $-4 + \sqrt{2}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۶- در $|-7| + \square \leq |-7-2|$ چه اعدادی می توان در مربع قرار داد تا نامساوی درست باشد.

سه عدد مثال بزنید.

۱۷- در تساوی $|-4 \times 3| = \square \times \square$ چه اعدادی می توان در مربع قرار داد تا تساوی درست

باشد؟ سه جفت عدد مثال بزنید.

۱۸- بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، چهار عدد گویا بنویسید.

۱۹- حاصل کسر زیر را به دست آورید.

$$-10\frac{7}{8} + 20\frac{3}{4} - 120\frac{1}{6}$$

۲۰- آیا $4\frac{1}{5} - 4 + \frac{1}{5}$ مساوی -4 است؟ چرا؟

۲۱- آیا $2\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3}$ مساوی -2 است؟ چرا؟

اهداف

– یادآوری و مرور این مطلب که بین دو عدد گویا همیشه می‌توان بی‌شمار عدد گویا به دست آورد.

– ایجاد پل ارتباطی بین اعداد گویا و اعداد حقیقی و لزوم به وجود آمدن اعداد حقیقی

– توجه به دانش آموزانی که یادگیری آنها به صورت تصویری است تا آنها نیز بتوانند زیر ساخت شناختی خویش را کامل کنند.

– استفاده از نمایش اعشاری اعداد برای مرتب کردن آنها از کوچک به بزرگ

یا برعکس

– آشنایی با مفهوم عدد اعشاری مختوم و متناوب

– توجه دانش آموزان به تخمین عدد اعشاری توسط ماشین حساب در ماشین

حساب‌های مختلف

– کامل کردن محاسبات با اعداد گویا

ابزار مورد نیاز :

۱- محور اعداد

۲- ماشین حساب

۳- نرم افزار معرفی شده

روش تدریس

شما می‌توانید مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد حسابی و مجموعه اعداد صحیح را روی تخته بنویسید و از دانش آموزان بخواهید مثلاً بگویند ۴- متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا عدد ۷ متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا از دانش آموزان بخواهید عددی مثال بزنند که متعلق به هر سه مجموعه باشد و یا فقط در Z باشد.

سپس قسمت (۱) فعالیت صفحه ۱۹ را از دانش آموزان بخواهید که انجام دهند.

در این فعالیت به نامساوی $x \geq 3$ توجه شده است که دانش آموزان با قراردادن اعداد ۱ و ۲ و

۳ و ۴ و ۵ درستی یا نادرستی عبارت را تحقیق می‌کنند.

درست $4 \geq 5$ درست $3 \geq 3$ نادرست $2 \geq 3$ نادرست $1 > 3$

در این فعالیت عبارت بر روی نابرابری $3 \geq 3$ تأکید شده است که :
نامساوی درستی است. دانش‌آموزان درستی این عبارت را از ردیف (۱) جدول مربوط به این فعالیت می‌توانند متوجه شوند.

در قسمت (۲) این فعالیت دانش‌آموزان به روش جبری و به روش هندسی، به این مفهوم پی می‌برند که بین هر دو عدد گویا می‌توان اعداد گویای بی‌شماری به دست آورد. پس با توجه به این واقعیت نمی‌توان مجموعه اعداد گویا را به صورت اعضا مانند $\mathbb{Z} / \mathbb{W} \in \mathbb{N}$ نمایش داد پس به روش $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ نمایش می‌دهیم. (در واقع در فعالیت‌های بعدی دانش‌آموزان به این درک خواهند رسید که $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) را به روش اعداد گویا هم نمی‌توان نمایش داد پس آن را روی محور نمایش می‌دهیم.

در فعالیت صفحه ۲۰ دانش‌آموزان می‌خواهند تعدادی اعداد گویا را از کوچک به بزرگ و یا برعکس مرتب کنند. روش محور روش خوبی است اما چون مخرج کسرها با هم متفاوت است اگر تعداد این اعداد زیاد شوند بسیار وقت گیر و گاهی غیر ممکن می‌شود. پس برای دو کسر $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ که روی محور نشان داده شده‌اند مشخص است که $\frac{3}{5}$ از $\frac{5}{6}$ کوچک‌تر است اما در روش مجید بقیه کسرها را با تقسیم صورت به مخرج تبدیل به یک عدد اعشاری می‌کنیم و در روش مرتضی مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم. در هر دو روش می‌توانیم کسرها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

وقتی دانش‌آموزان صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنند، بعضی از این اعداد مانند $\frac{1}{3}$ به صورت $0.333333\ldots$ خواهند بود که با نمایش مثلاً $\frac{2}{5} = 0.4$ متفاوت است. در اینجا دانش‌آموزان با این اعداد، آشنا می‌شوند.

توصیه‌های آموزشی

۱- از آنجا که بعضی از دانش‌آموزان یادگیری بصری دارند به آنها فرصت دهید از روی محور عدد بین دو عدد گویا را به دست آورند.

۲- برای تدریس این قسمت دانش‌آموزان نیاز به ماشین حساب دارند پس آوردن ماشین حساب را در جلسه قبل یادآوری کنید.

۳- روی درست بودن عبارت $2 \leq 2$ و $4 \geq 4$ به اندازه کافی تأکید کنید.

۴- دانش‌آموزان باید بدانند چگونه واحدهای روی محور را به دو قسمت، سه قسمت و ... تقسیم کنند. پس لازم است قبل از شروع فعالیت این مطلب یادآوری شود.

۵- توجه دانش‌آموزان را به این مطلب جلب کنید که چگونه W از روی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ از روی W ساخته شده است.

۶- اجازه دهید دانش‌آموزان درباره روش‌های مختلف گفته شده در فعالیت با هم بحث کنند، دنبال بهترین راه حل نباشید.

اشتباهات رایج

۱- دانش‌آموزان نامساوی $3 \leq 3$ را غلط فرض می‌کنند در صورتی که درست است.

۲- دانش‌آموزان $2/875$ را از $2/9$ بزرگ‌تر می‌بینند.

۳- دانش‌آموزان در محاسبه $1 + \frac{2}{3}$ را مساوی $1\frac{2}{3}$ می‌گیرند در صورتی که $1\frac{2}{3} = -1 - \frac{2}{3}$ می‌باشد.

۴- دانش‌آموزان در محاسبه $2 + \frac{1}{3} \times \frac{5}{14} \div \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$ ابتدا ضرب را انجام می‌دهند و بعضی از آنها ابتدا $-\frac{2}{3} + \frac{7}{5}$ را محاسبه می‌کنند.

۵- دانش‌آموزان $-\frac{2}{3}$ را بزرگ‌تر از $-\frac{1}{3}$ می‌گیرند. در اینجا لازم است تأکید شود که هر چه عدد سمت راست محور باشد بزرگ‌تر است.

۶- دانش‌آموزان وقتی می‌خواهند واحد را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنند با گذاشتن ۵ نقطه در واقع آن را به ۶ قسمت تقسیم می‌کنند.

اهداف

— پیدا کردن مقدار تقریبی $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... به کمک ماشین حساب و توجه به اینکه ماشین حساب‌های مختلف به دلیل اینکه بعضی ۸ خانه، بعضی ۹ خانه و... برای نمایش عدد دارند ممکن است در رقم آخر نمایش اعشاری با هم تفاوت داشته باشند (به دلیل گرد کردن)

—شناختن اعدادی مانند $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{1/5}$ به عنوان عدد اصم

– نام گذاری اعداد اصم به صورت Q' و یا Q^c

— اعدادی مانند ۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰٪ با داشتن نظم، مشخص اما گویا نیستند بلکه اصم هستند.

— عدد π اصم است.

– مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می دهیم و $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

— اینکه بین هر دو عدد اصم بی شمار عدد وجود دارد.

– آشنایی با بعضی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی به عنوان مثال $\{x|x<5\}$

– دانش‌آموزان تفاوت دو مجموعه $\{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$ و $\{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$ را بدانند.

ابزار مورد نیاز :

۱- ماشین حساب

۲- محاور اعداد

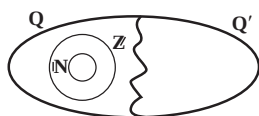
۳- نرم افزار معرفی شده

روش تدریس

هدف کلی این درس شناخت اعداد اصم و در نتیجه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد حقیقی می باشد. برای این منظور در فعالیت صفحه ۲۴ دانش آموزان عددی مانند $\sqrt{2}$ را به کمک ماشین حساب تقریب می زنند و با توجه به قسمت اعشاری این عدد، تفاوت آن را با نمایش اعشاری اعدادی مانند $\frac{1}{11}$ و $\frac{7}{6}$ متوجه می شوند. در ضمن ممکن است در هنگام استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری $\sqrt{2}$ با این موضوع روبه رو شوند که رقم آخری که ماشین حساب نشان می دهد برای دانش آموزان مختلف در کلاس یکسان نباشد در اینجا دانش آموزان کشف می کنند رقم آخر با توجه به

قانون گرد کردن اعداد نوشته می شود. مثلاً در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد زیرا در واقع در عدد $1/41421356 \approx 2$ به دلیل وجود ۶ که از ۵ بزرگ تر است عدد ۵ به ۶ تبدیل شده است.

در این فعالیت اعداد گنگ معرفی می شود و مجموعه ای که این اعداد در آن قرار دارند را Q' و یا Q^c می نامیم. در این فعالیت عدد π نیز به عنوان عدد گنگ معرفی می شود.



نمایش سمبولیک برای مجموعه های N و Z و Q' ارائه شده است و جمع بندی مناسبی از این مجموعه در ذهن دانش آموزان شکل خواهد گرفت.

با انجام فعالیت صفحه ۲۵ طبق مراحل ذکر شده، دانش آموزان به طور انتزاعی پاره خطی را در ذهن می آورند که داخل آن سوراخ هایی قرار دارند که نمی گذارند پاره خط مورد نظر شکل واقعی خود را بیابد و این اعدادی که مانع از تشکیل این پاره خط هستند اعداد گنگ یا اصم هستند.

با انجام این فعالیت باید این روند در ذهن دانش آموزان شکل بگیرد که ما به کمک مجموعه N ، مجموعه Z را و به کمک مجموعه Z ، Q را ساختیم ولی اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، ... وجود دارند که در Q نیستند و مجموعه جدیدی را تشکیل می دهند که باعث خلق مجموعه R می شود.

با انجام کار در کلاس صفحه ۲۶، دانش آموزان متوجه می شوند که بین هر دو عدد گنگ نیز می توان بی شمار عدد گنگ به دست آورد و بین هر دو عدد گویا نیز بی شمار عدد گنگ وجود دارد. برای مثال :

$$1) \sqrt{5} < \sqrt{5/2} < \sqrt{6} < \sqrt{7/8} < \sqrt{8} < \dots < \sqrt{10}$$

$$2) 2 = \sqrt{4}, 3 = \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{4/8} < \sqrt{5} < \dots < \sqrt{9}$$

در تمرین ۳ کار در کلاس روی این موضوع تأکید می شود که اعداد گویا که در رابطه $2 \leq x \leq 3$ صدق می کنند یک پاره خط را نمایش نمی دهد چون اعداد گنگ بین آنها این اجازه را نخواهند داد که این پاره خط تشکیل شود.

در فعالیت شماره ۳ صفحه ۲۷ بعضی از زیر مجموعه های مجموعه R به صورت $\{x \in R | x < 3\}$ یا $\{x \in R | -1 < x \leq 4\}$ روی محور نمایش داده شده اند.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۲۷، به یک بدفهمی دانش آموزان توجه شده است که آنها

مجموعه $\{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$ فقط اعداد -1 و 0 و 1 و 2 و ... در نظر نگیرند.

توصیه‌های آموزشی

- ۱- برای تدریس این درس دانش‌آموزان به ماشین حساب نیاز دارند. در جلسه قبل به آنها یادآوری کنید با خود ماشین حسابی را بیاورند که بتواند جذر اعداد را محاسبه کند.
- ۲- قبل از شروع درس رابطه فیثاغورث و نمایش اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، ... را روی محور یادآوری کنید.
- ۳- از دانش‌آموزان به طور شفاهی بخواهید عددی بزرگ‌تر از مثلاً ۵ بگویند آیا پاسخ خواهند داد ۶ و ۷ و ... قانع نشوید از آنها بخواهید غیر از این مدل عددها، عددهای دیگر را معرفی کنند. مثلاً $5/2$ و $5/01$ و ...
- ۴- از دانش‌آموزان بخواهید به طور ذهنی مقدار تقریبی مثلاً $\sqrt{2}$ و $\sqrt{10}$ و $\sqrt{15}$ و $\sqrt{70}$ را بگویند مثلاً بگویند $\sqrt{7}$ می‌شود ۲ و خرده‌ای.
- ۵- بعد از فعالیت فوق از آنها بخواهید به طور ذهنی عددهایی مانند $\sqrt{10}$ و $\sqrt{15}$ و ... را بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهند. دانش‌آموزان را در انجام این فعالیت درگیر کنید.
- ۶- در پایان فعالیت به کمک بچه‌ها، عددی را بگویند و از آنها بخواهید بگویند این عدد به کدام یک از مجموعه‌های خوانده شده تعلق دارد مثلاً ۶- متعلق به Z و Q و R می‌باشد.
- ۷- وقتی فعالیت‌های کتاب را انجام دادید در پایان یک بار روند به وجود آمدن $\mathbb{R}$ را در کلاس مرور کنید.
- ۸- به دانش‌آموزان فرصت دهید آموخته‌های خود را سازماندهی کنند.

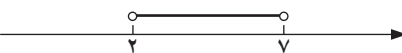
اشتباهات رایج

- ۱- وقتی می‌گوییم اعداد بین مثلاً ۵ و ۱۰، دانش‌آموزان فقط به اعداد طبیعی ۶ و ۷ و ۸ و ۹ اشاره می‌کنند. باید در فواصل درس تأکید کنیم مثلاً $5/2$ و $7/9$ و $5/001$ نیز اعدادی بین دو عدد ۵ و ۱۰ می‌باشند.
- ۲- دانش‌آموزان نظم در اعدادی مانند 200200200200 را به معنای وجود تناوب می‌گیرند در صورتی که این عدد گنگ است و گویا نیست.

۳- $\frac{5}{5}$ عدد حقیقی نیست و در واقع $\frac{5}{5}$ کلاً عدد نیست.

۴- $\frac{5}{5}$ همان صفر است.

۵- دانش‌آموزان $\{x | 2 < x < 7\}$ را مساوی $\{3, 4, 5, 6\}$ می‌گیرند. تأکید کنیم مجموعه

$\{x | 2 < x < 7\}$ را می‌توان روی محور به صورت  نمایش داد و توسط اعضا نمی‌توانیم آن را نمایش دهیم.

اهداف

- شناخت علامت قدر مطلق
- تغییر هندسی قدر مطلق
- بیان مفهوم جبری قدر مطلق
- محاسبه قدر مطلق یک عدد
- کاربرد قدر مطلق در محاسبه عباراتی مانند $\sqrt{A}$ $|A|$
- دانش آموزان بتوانند عبارات فارسی را به ریاضی و برعکس بنویسند.
- ابزار مورد نیاز:
- ۱- محور اعداد
- ۲- نرم افزار معرفی شده

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۲۹، دانش آموزان فاصله دو نقطه A و B که نسبت به مبدأ مختصات قرینه هستند را مساوی ۲ به دست می آورند و برعکس دو نقطه به دست می آورند که فاصله آنها تا مبدأ مساوی مثلاً ۲ واحد می باشد. پس دانش آموز می تواند عبارت $|۲|$ را به دو صورت بخواند، قدر مطلق ۲ و یا فاصله ۲ از مبدأ و عبارت $|-۲|$ را نیز می تواند به دو صورت بخواند قدر مطلق ۲- و یا فاصله ۲- از مبدأ را که در هر دو حالت داریم $۲ = |-۲| = |۲|$. با چند مثال نشان می دهیم که $۵ = |۵|$ و $۵ = |-۵|$ چیزی که مهم است آن است که برای به دست آوردن جواب $|-۵|$ گفته نشود که علامت ۵- حذف می شود بلکه گفته شود که (۵-) را قرینه می کنیم. و این به بیان جبری قدر مطلق کمک کرد. با تمرین کافی در این قسمت به دانش آموزان فرصت دهیم که خود به بیان جبری قدر مطلق پی ببرند.

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a \quad \text{خود عدد}$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a \quad \text{قرینه عدد}$$

تأکید می کنیم که در واقع $-a$ عددی مثبت است چون a منفی است.

در کار در کلاس صفحه ۳۰ تمرین ۱، دانش آموزان جملات فارسی را به مفهوم معادل آن به زبان ریاضی وصل می کنند یعنی (۱) به د، (۲) به الف، (۳) به ب، (۴) به ج و (۵) به ه وصل خواهد شد. در تمرین ۲ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲، ب به ۳ و ج به ۱ وصل می شود.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲، ب به ۳، ج به ۱ و د به ۴ وصل می‌شود.
در تمرین ۴ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ دانش‌آموزان می‌توانند مثال‌های زیر را مطرح کنند.

$$۱) |ab| = |a| |b|$$

$$|-3 \times 7| = |-21| = 21$$

$$|-3 \times 7| = |-3| \times |7| = 3 \times 7 = 21$$

$$۲) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|-4 + 9| \leq |-4| + |9|$$

$$5 \leq 4 + 9$$

با توجه به مقدار تقریبی این اعداد دانش‌آموزان راجع به مثبت یا منفی بودن مقدار داخل رادیکال قضاوت خواهند کرد و با توجه به تعریف جبری قدر مطلق حاصل عبارت را بدون استفاده از نماد قدر مطلق خواهند نوشت.

در فعالیت صفحه ۳۱، بعد از انجام فعالیت دانش‌آموزان به این نکته توجه خواهند کرد که حاصل عبارت $\sqrt{A^2} = |A|$ خواهد شد و همیشه نمی‌توانند $\sqrt{A^2} = A$ را استفاده کنند.

در شروع فعالیت اعداد کوچک هستند و دانش‌آموزان آن را به توان ۲ می‌رسانند ولی در ادامه فعالیت از اعداد بزرگ استفاده شده است که به توان ۲ رساندن آنها برای دانش‌آموزان سخت است و آنها دنبال راه چاره گشته، متوجه می‌شوند که این اعداد باید به صورت مثبت از زیر رادیکال خارج شوند، که همان مفهوم قدر مطلق است. پس:

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \overbrace{|1-\sqrt{3}|}^{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

در کار در کلاس صفحه ۳۲، چون 25° از 26° بزرگ‌تر است پس حاصل $25^\circ - 26^\circ$.

مثبت است. پس:

$$|25^\circ - 26^\circ| = 25^\circ - 26^\circ$$

$$|7^3 - 7^4| = -(7^3 - 7^4) = 7^4 - 7^3 \quad \text{و } 7^4 \text{ از } 7^3 \text{ بزرگ‌تر است و}$$

در تمرین ۳ به جای $\square$ می‌توان اعدادی مانند ۸- و ۲ و ۵ و ۲- و ... را قرار داد.

$$|5 - 12| > 1 + \square$$

و یا

$$7 > 1 + \square$$

در تمرین ۵ اگر به جای a اعداد منفی قرار دهیم به یک عبارت نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sqrt{(-8)^2} \neq -8$$

توصیه‌های آموزشی

- ۱- برای محاسبه حاصل $|-۴|$ به هیچ وجه نگویید علامت منفی حذف می‌شود بلکه بگویید قرینه -۴ می‌شود ۴ یعنی $4 = -(-4) = |-۴|$ و یا از مفهوم فاصله استفاده کنید.
- ۲- برای محاسبه عبارتی مانند $|۱ - \sqrt{۵}|$ و یا $|-۱ + \sqrt{۲}|$ از دانش‌آموزان بخواهید با ذکر دلیل توضیح دهند حاصل این عبارت چه خواهد شد.
- ۳- از گسترش مفهوم قدر مطلق به مطالب سخت‌تر خودداری کنید زیرا این مفهوم برای دانش‌آموزان بسیار جدید و انتزاعی است.

اشتباهات رایج

- ۱- دانش‌آموزان $\sqrt{a^2} = a$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند $\sqrt{a^2} = |a|$
- ۲- دانش‌آموزان $\sqrt{(-۳۰۰)^2} = -۳۰۰$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند $\sqrt{(-۳۰۰)^2} = ۳۰۰$
- ۳- اگر برای محاسبه مقدار $|-۵|$ گفته شود علامت منفی را حذف می‌کنیم دانش‌آموزان در محاسبه حاصل $|۱ - \sqrt{۷}|$ علامت منفی را حذف می‌کنند و می‌نویسند $۱ + \sqrt{۷}$
- ۴- دانش‌آموزان می‌نویسند $|a| = \pm a$ که غلط است زیرا جواب $|a|$ فقط یک عدد است اگر $a \geq ۰$ باشد $|a| = a$ و اگر $a < ۰$ باشد $|a| = -a$.

حل تمرین های

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر حاصل را تا حد امکان ساده کنید :

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{20-3}{24} = \frac{17}{24}$$

$$\frac{5}{6} \div 2 \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \div \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}) \div (-1 - \frac{1}{9})$$

$$= (-\frac{17}{6} + \frac{7}{2}) \div (-\frac{9-1}{9})$$

$$= (-\frac{17+21}{6}) \div (-\frac{10}{9}) = \frac{\cancel{X}}{\cancel{6}} \times (-\frac{\cancel{X}^2}{\cancel{X}^0_5}) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{3} = \frac{\frac{4-2+3}{4}}{\frac{10-15-10}{20}} \div \frac{16}{3}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{-15}{20}} \times \frac{3}{16} = -\frac{5}{3} \times \frac{3}{16} = -\frac{5}{16}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{-5}{\cancel{6}_2} \times \frac{\cancel{X}^1}{\cancel{X}^3} \times \frac{\cancel{X}^7}{\cancel{X}^5} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-3-3+4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} = -\frac{5}{2} - \frac{10}{3} + \frac{55}{12}$$

$$= \frac{-30-40+55}{12} = \frac{-15}{12} = -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \div \frac{-6}{5}) \quad \left| \quad \frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{-1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \right.$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (\frac{1}{1} \times \frac{5}{\cancel{8}_3}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (-\frac{5}{3})$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{7}{8} \times \frac{-3}{5} = \frac{5}{6} + \frac{21}{40} = \frac{100 + 63}{120} = \frac{163}{120}$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$ ب) $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

$$-3\frac{5}{6} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2 \quad \quad \quad -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{16}{7} < 2/75 < \frac{56}{13} < 4\frac{3}{5}$$

۴- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}$ ب) $\frac{0}{3} < ? < \frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}$

$$\frac{10}{11} < ? < \frac{12}{13}$$

$$\frac{130}{143} < ? < \frac{132}{143} \rightarrow \frac{260}{286} < ? < \frac{264}{286}$$

$$\frac{261}{286}, \frac{262}{286}, \frac{263}{286}$$

$$-\frac{4}{12} < ? < \frac{0}{12}$$

$$\rightarrow -\frac{3}{12}, -\frac{2}{12}, -\frac{1}{12}$$

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	$\circ$	π	$-\frac{3}{4}$	$\circ/2922922929....$	-1°	$\frac{6}{2}$
طبیعی $\mathbb{N}$	×	×	×	×	×	×	×	✓
حسابی $\mathbb{W}$	×	×	✓	×	×	×	×	✓
صحیح $\mathbb{Z}$	×	×	✓	×	×	×	✓	✓
گویا $\mathbb{Q}$	×	✓	✓	×	✓	×	✓	✓
گنگ $\mathbb{Q}'$	✓	×	×	✓	×	✓	×	×
حقیقی $\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

مجموعه A شامل تمام اعداد حقیقی بین $\frac{1}{5}$ و ۵ است در حالی که مجموعه B شامل تمام اعداد گویا بین $\frac{1}{5}$ و ۵ است.

ج) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

مجموعه C اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است در حالی که مجموعه D تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است.

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$1) \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad 2) \mathbb{R} - Q' = Q \quad 3) \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \quad 4) \mathbb{R} \cap Q' = Q'$$

۴- عدد $1 + \sqrt{5}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ ۳ و ۴

۵۔ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

٥ و ٢- الف) ٧ و ٦ ب) ٦, ٣ ج) $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$ د)

$$\sqrt{2,1}, \sqrt{2,5}, \sqrt{3}, \sqrt{3,5} \quad \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8} \quad 6 = \sqrt{36} \quad 5 = \sqrt{25}$$

$$v = \sqrt{r g} \quad -v = -\sqrt{r g}$$

$$\sqrt{37}, \sqrt{38} \quad \sqrt{21}, \sqrt{17}$$

$$\sqrt{39}, \sqrt{40} \quad \sqrt{5}, -\sqrt{3}$$

۶- عبارات درست را با $\checkmark$ و عبارات نادرست را با $\times$ مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

۱ ☒ عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. $\frac{6}{2}$

۲ ☒ عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۳ ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{2}$

۴ ☒ عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. ۳

۷- در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{11}$ و عدد $\frac{3}{11}$ چه تفاوتی هست؟

$\sqrt{11}$ به دلیل نداشتن دوره تناوب گنگ بوده ولی $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$

$\frac{3}{11}$ متناوب بوده و عددی گویا است $\frac{3}{11} = 0.\overline{27}$

تمرین

۱- اگر $a = 0/25$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = 2\frac{1}{4}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

$$25 + (-0/25) + 2|0/25 - (-0/25) - 2/5| = 2|0/5 - 2/5| = 2|-2/5| = 2 \times 2/5 = 4$$

۲- حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید:

(الف) $|-3\sqrt{5}|$ (ب) $|7-5\sqrt{3}|$ (ج) $|0+\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

$= -(-3\sqrt{5})$ $= -(7-5\sqrt{3})$

$= 3\sqrt{5}$ $= -7+5\sqrt{3}$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

هر عدد کوچک تر از ۶ صحیح است. $|\frac{7}{5-12}| > 1 + \boxed{5}$

۴- مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-2$ ، $a=0$ و $a=2$ به دست آورید. آیا می توانید

عددی حقیقی به جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ خیر

$$a = -2 \rightarrow |a| + a = |-2| + (-2) = 0$$

$$a = 0 \rightarrow |a| + a = |0| + 0 = 0$$

$$a = 2 \rightarrow |a| + a = |2| + 2 = 4$$

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = +7 \neq -7$$

۶- حاصل عبارات زیر را به دست آورید: $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ و $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$

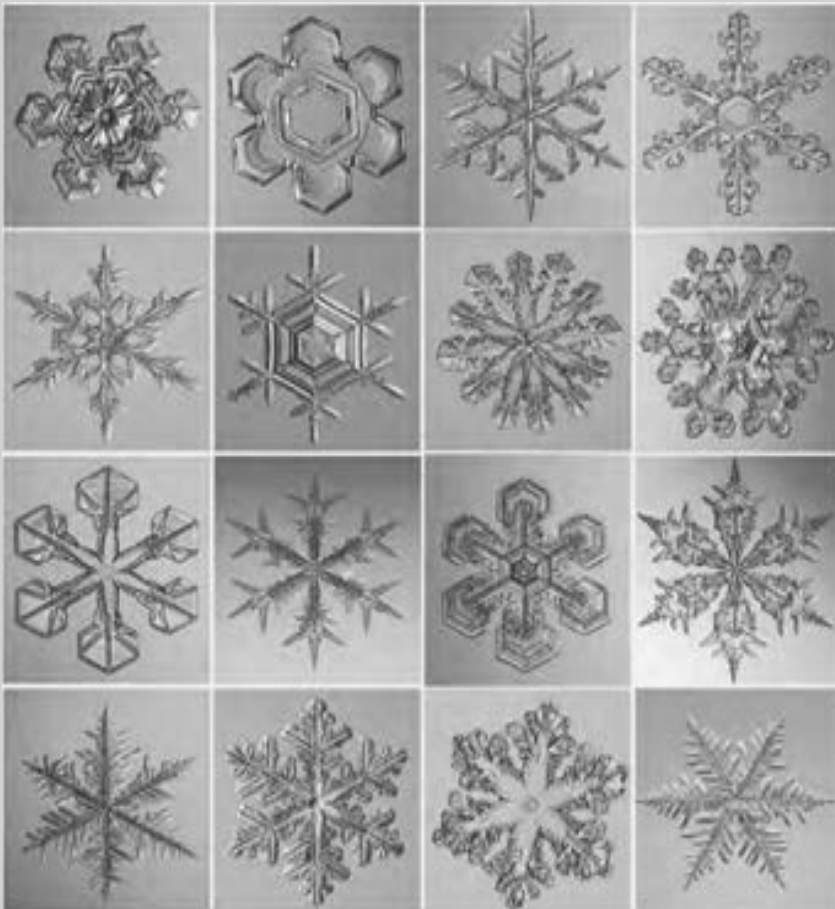
$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = |1-\sqrt{10}| = -(1-\sqrt{10}) = -1+\sqrt{10}$$



استدلال و اثبات در هندسه

أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحِكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَجَادِلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ ...
با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و
مناظره کن! (سوره نحل، آیه ۱۲۵)

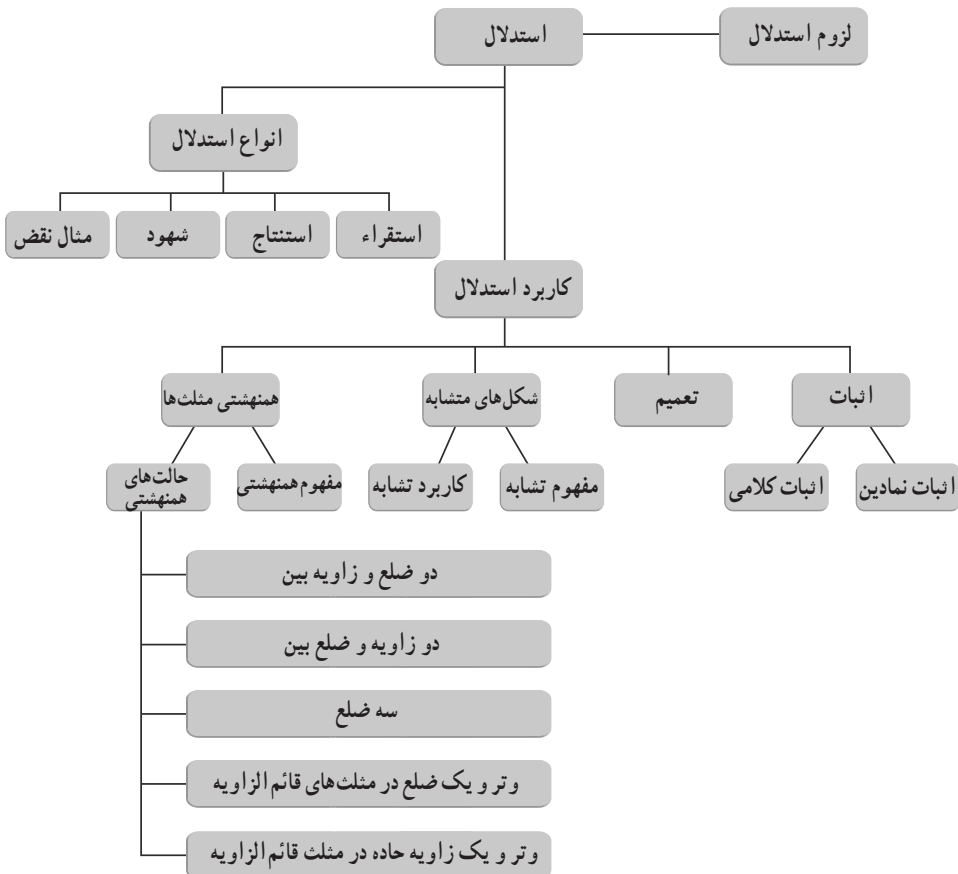


بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی رغم آنکه میلیاردها دانه اند، اما هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

نگاه کلی به فصل

– تفکر ریاضی با به کارگیری مهارت‌های غنی ریاضی برای درک ایده‌ها، کشف روابط میان ایده‌ها، به دست آوردن یا حمایت از نتایج دربارهٔ ایده‌ها و روابطشان و حل مسائلی که با ایده‌ها سروکار دارند، شکل می‌گیرد. استدلال ریاضی بخشی از فرایند ریاضی است. این فصل شامل پنج درس می‌باشد که در دو درس اول، دانش‌آموز با استدلال، اثبات و نیز برخی مفاهیم مانند تعمیم که در استدلال‌ها به کار می‌روند آشنا می‌شود. در درس‌های سوم و چهارم، همنهشتی مثلث‌ها و تسلط نسبی بر حل مسائل آن و نوشتن منظم برخی اثبات‌ها با نمادهای ریاضی مدنظر می‌باشد و نیز با برخی مطالب که در حل مسائل او را یاری می‌نماید آشنا خواهد شد و در درس آخر این فصل با مفهوم تشابه آشنا می‌شود.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

استدلال ریاضی قسمتی از تفکر ریاضی است که با تشکیل تعمیم‌ها و به دست آوردن نتایج معتبر درباره ایده‌ها و چگونگی ارتباط آنها درگیر است. دو نوع مهم استدلال ریاضی، استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی است.

پیش پولیا: یک اثبات ریاضی، استدلالی مدلل (استنتاجی) است در صورتی که شواهد استقرایی یک فیزیکدان، شواهد محیطی (مربوط به موقعیت) یک وکیل دادگستری، شواهد آماری یک اقتصاددان، متعلق به استدلال محتمل را دارا باشد. استدلال استقرایی حالت خاصی از استدلال محتمل است.

با وجود اینکه پولیا استدلال تمثیلی و استدلال استقرایی را به عنوان حالت‌های خاص استدلال محتمل و استدلال نسبی (نسبی، مشابهتی) را به عنوان یک حالت از استدلال تمثیلی محسوب می‌کند، ما به طور مقدماتی و ابتدایی با استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی سروکار خواهیم داشت.

استدلال استقرایی: یک فرایند استدلال ریاضی است که اطلاعات درباره بعضی از اعضای یک مجموعه را به کار می‌گیرد تا یک تعمیم در مورد اعضای دیگر یا همه اعضای آن مجموعه بسازد. **استدلال استنتاجی:** یک فرایند استدلال ریاضی است که الگوهای استنتاج به کار رفته برای به دست آوردن نتایج از مقدمات را معتبر می‌سازد.

توجه کنید که استدلال شرطی به کارگیری یک اگر – آنگاه یا گزاره‌های شرطی در فرایند استدلال استنتاجی است. الگوهای اساسی استنتاج معتبر و نامعتبر مورد استفاده در استدلال شرطی در زیر مرور شده است.

درک و فهم ریاضی

جنبه‌های گوناگون درک و فهم ریاضی نیز وابسته به شهود ریاضی است. درک و فهم ریاضی از مواردی است که به صورت دقیق تعریف نشده است و شاید بتوان آن را با «دقت ریاضی» تعریف کرد. فرویدنتال نه تنها پیچیدگی دانش و فهم ریاضی، بلکه تفاوت حساس بین درک و فهمی که یک معلم باید جویای آن باشد و می‌خواهیم دانش‌آموزان فراگیرند، این طور جمع‌بندی می‌کند: «فهمیدن در ریاضیات گونه‌های بسیار دارد. شما ممکن است هر لحظه فکر کنید به فهم نهایی فلان مطلب رسیده‌اید، چنان که دیگر چیزی نمی‌توان از آن دریافت. اما در ریاضیات فهم نهایی وجود ندارد. هر مسئله‌ای را می‌توان در بافتی هر دم گسترده‌تر و از نقطه نظری بالاتر فهمید آنچه پایین‌ترین می‌نماید،

شاید بالاترین باشد و در آخر اینکه می‌توان آن را از چشم‌انداز یادگیرنده فهمید.»
با این حال باید با جوانب مختلف درک و فهم ریاضی آشنا بود. دسته‌بندی زیر می‌تواند تسهیل‌کننده باشد.

- ۱- درک معنا شناختی یعنی شناخت اطلاعات مندرج در مفاهیم و قضایا.
- ۲- درک منطقی یعنی شناخت پیوندها و رابطه‌های منطقی قضایایی که به صورت حقایق پذیرفته شده شخصی درآمده‌اند.
- ۳- درک شهودی یعنی قانع شدن واقعی به درستی یک قضیه و توانایی به‌کارگیری صحیح مفاهیم، بدون توسل به تعاریف رسمی و واریسی مکانیکی.
- ۴- درک ریاضی یعنی آگاهی از مقاصد درونی ابزارهای ریاضی، مثلاً ساده کردن یک عبارت گویا برای تسهیل محاسبه مقدار عددی آن به‌ازای مقادیر مختلف متغیرها، یا توسل به فرض‌های غیربدیهی به عنوان اصل پذیرفته شده، برای ساده کردن یک موقعیت
- ۵- درک ریاضی یعنی آگاهی از کاربردپذیری بیرونی بالقوه ریاضیات.

مشکلات مهم دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی کدامند؟

روشن است که دانش‌آموزان مشکلات قابل‌توجهی در مورد استفاده از الگوهای استنتاجی معتبر دارند.

- بسیاری از دانش‌آموزان مشکل به‌کارگیری استدلال صوری برای کشف نتایج الزامی در الگوهای استنتاجی درگیر با عبارت‌های اگر-آنگاه (غیر از قیاس استثنایی) دارند.
- غالباً دانش‌آموزان عبارت «اگر-آنگاه» را مثل «اگر و تنها اگر» تعبیر می‌کند. بسیاری از آنها ارزشمندی الگوی استنتاجی قیاس استثنایی منفی (نقیض انتزاع) را نمی‌شناسند.
- بسیاری از دانش‌آموزان الگوهای استدلالی نامعتبر وارونه و معکوس را نمی‌شناسند.
- مشکل بسیاری از آنها به عبارت‌های شرطی منفی مربوط است.

دلایل اصلی خطاهای استدلال استنتاجی چیست؟

پژوهش واسون و یوهانسون - لیارد شواهد مؤثری برای موردی که خطاهای حساب منطق تنها مربوط به قسمتی از خطاهای استدلال استنتاجی است، ارائه می‌کند. همچنین می‌توانند نتیجه دشواری حفظ اثر اطلاعات و نبودن نشانه‌های معنایی (معنی‌شناسی) که به یک تفسیر معین علامت

می‌فرستند، باشند. یوتر، هنگامی که خطاهای به‌وجود آمده در استدلال استنتاجی را تفسیر می‌کرد، یک آزمون قوی به‌وجود آورد به‌طوری که نه تنها موضوعات منطق صوری، بلکه عملیات ذهنی موردنیاز برای انجام تکالیف را مورد بررسی قرار می‌داد.

دلایل اشتباهات در استدلال استنتاجی برگرفته از چندین مطالعه در زیر جمع‌بندی شده است.

● خطاها در استدلال استنتاجی به وسیلهٔ افزودن، جرح و تعدیل یا چشم پوشیدن مواردی از مقدمات به‌وجود می‌آیند.

● اشتباهات به وسیلهٔ پذیرفتن محتوای واقعی به‌جای الگوی استنتاجی به‌وجود آمده‌اند. الگوهای سنتی سخنرانی (مباحثه) روزمره اغلب منطق را باطل می‌کند.

● دلایل دیگر اشتباهات، مشکلات زبانی هستند. تعداد و مکان منفی‌ها، طول کلمه و جمله و سرریز شدن شناختی از آن جمله هستند.

● ناتوانی در پذیرش فرضیه، گونه‌ای دیگر از علت‌های این خطاها می‌باشد.

آیا توانایی‌های استدلال استنتاجی از راه آموزش بهبود می‌یابد؟

برخی از مطالعات آشکار کرد که آموزش با استفاده از مواد و وسایل دست‌ورزی انتخاب شده، تأثیر مثبت روی توسعهٔ توانایی استدلال منطقی کودکان سال دوم و سوم دارد. سویز و باینفورد گزارش کردند که چارک بالای دانش‌آموزان سال پنجم و ششم می‌توانند مقدمات اصلی منطق را در سطح ۸۵ درصد از آنچه که در مطالعهٔ یکسان دانشجویان دانشگاه به آن دست می‌یابند، به‌کار بگیرند و در یک فاصله زمانی بلند آن را گسترش می‌دهند. انیس و پائولوس نشان دادند که منطق کلاسی می‌تواند با موفقیت برای دانش‌آموزان ۱۱ و ۱۲ ساله آموزش داده شود اما این آموزش به دانش‌آموزان کمک نمی‌کند تا الگوهای نامعتبر را کشف و شناسایی کنند. شیپمن این را یافت که معلم معمولی که از زبان و ایده‌های شرطی در کلاس درس استفاده می‌کند، به‌نظر می‌رسد که تأثیر مثبتی بر رشد توانایی استدلالی دانش‌آموزان دارد.

● دورهٔ قبل از بلوغ کودکان (۹ تا ۱۲ سالگی) می‌تواند برای توسعهٔ بعضی از انواع توانایی‌ها، استدلال استنتاجی به وسیلهٔ تجربیات به‌طور دقیق طرح شده، به‌کار رود.

● استدلال کلاسی را می‌توان در اوایل دورهٔ بلوغ آموزش داد اما موفقیت آموزشی مهم در بهبود و اصلاح توانایی‌های قبل از ۱۶ سالگی دورهٔ بلوغ برای شناخت روش‌های استنتاجی نامعتبر گزارش نشده است.

● جایی که یک معلم اغلب به طور طبیعی ایده‌ها و زبان استدلالی اگر – آن‌گاه را به کار می‌برد، همبستگی مثبت بین رشد توانایی استدلال و به عمل درآمدن در کلاس درس وجود دارد.

مشکلات اصلی دانش‌آموزان با اثبات‌ها چیست؟

سنگ یک نمونه ۱۵۲۰ تایی از دانش‌آموزان درس هندسه را انتخاب کرد و در مورد مشکلات دانش‌آموزان با اثبات‌های هندسی گزارش ارائه کرد. در زیر یافته‌های اصلی سنگ و ارنست بیان شده است.

● دانش‌آموزان مشکلات زبانی و منطقی با اثبات‌ها دارند و این مشکل برای به وجود آوردن یک اثبات سد راه می‌شود. آنها اغلب قضیه‌ای که باید ثابت شود را به عنوان دلیل در اثبات خودش و صور استنتاجی نامعتبر را مورد استفاده قرار می‌دهند.

● اثبات با نمودارهایی که شامل چند مجموعه از مثال‌های محاط شده یا خطوط کمکی مورد نیاز می‌باشند، از جمله مشکل‌ترین‌ها بودند. اثبات‌های تشابه بیشتر از اثبات‌های همنهشتی که همان تعداد استنتاج نیاز دارد، دشوار هستند.

● دانش‌آموزان با پیچیدگی اصل استقرای ریاضی مشکل دارند.

● عدم تفاوت مربوط به جنسیت در اثبات‌نویسی موفقیت‌آمیز مشهود است.

نگاهی به نقش اثبات در کلاس درس

نقش اثبات در کلاس درس همانند نقش آن در پژوهش ریاضی نیست. در تحقیقات ریاضی اثبات برای متقاعد کردن و رسمیت بخشیدن یک ایده است. در صورتی که در کلاس درس اثبات برای توضیح دادن، روشن کردن یک مفهوم یا یک حکم، مورد نیاز است؛ توضیح برای اینکه چرا قضیه‌ای درست است، در کلاس اثبات به مفهوم منطق صوری نیست. در کلاس اثبات‌های غیررسمی، غیرصوری یا نیمه‌صوری با زبان طبیعی (معمولی) ارائه می‌شود و می‌توانند در درون خود، زیر اثبات‌های صوری یا محاسبات را به کار گیرند.

بعضی از معلمین خیال می‌کنند که: «اگر کلاس ریاضی است، باید ثابت کرد. اگر چیزی ثابت نمی‌شود، آن ریاضی نیست!» این تصور و باور یک پیامد مستقیم در تدریس دارد. زیرا اگر اثبات، ریاضی است و ریاضی، اثبات است، آن‌گاه مأموریت معلم در کلاس، اثبات کردن است. در این صورت، بیشتر وقت کلاس به اثبات می‌گذرد؛ اثبات‌های راستین و دقیق تا احساس کنند کلاس واقعاً وجود دارد!

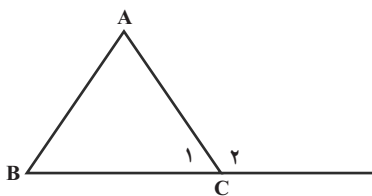
در این دیدگاه ارائه اثبات به دانش آموز انگیزشی است ناخرمندان و ناآگاهانه! اگر معلم دلیلی بهتر از اینکه «ریاضی یعنی این» ارائه ندهد، دانش آموز می‌داند که تنها یک اثبات دیده است، اما نه چرایی آن.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- استدلال‌های زیر را به ترتیب میزان اعتبارشان مشخص کنید.

(الف) فردی ده مثلث مختلف را بررسی کرد و دید که در همه آنها هر سه میانه در یک نقطه به هم می‌رسند و از این موضوع نتیجه گرفت در همه مثلث‌ها، میانه‌ها در یک نقطه به هم می‌رسند.

(ب) استدلال زیر نشان می‌دهد هر زاویه خارجی یک مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است فرض کنیم $\hat{C}_1$ مانند شکل زیر زاویه خارجی مثلث دلخواهی مانند ABC است داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \\ \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2 \end{array}$$

پس زاویه $\hat{C}_2$ برابر مجموع دو زاویه B و A است پس از هر کدام آنها بزرگ‌تر است.

۲- یک نمونه از استدلال‌های درست و یک نمونه از استدلال‌های غلطی را که شنیده‌اید

بنویسید.

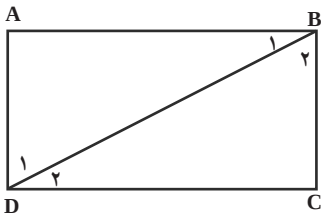
۳- مسئله زیر را به همراه حل آن در نظر بگیرید. فرض، حکم و پیش دانسته‌ای که در استدلال

حل آن مورد استفاده قرار گرفته‌اند بنویسید.

مسئله: مجموع زوایای یک مستطیل برابر 360° است.

حل: مستطیلی دلخواه مانند شکل صفحه بعد را در نظر می‌گیریم و یکی از قطرهای آن را

(مثلاً BD) رسم می‌کنیم.



داریم: $\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ و $\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2$ پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2$$

$$= (\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1) + (\hat{C} + \hat{B}_2 + \hat{D}_2) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

۴- فرض و حکم مسئله زیر را بنویسید.

— اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن گاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر.

۵- مسئله‌ای طرح کنید که در آن حکم کلی غلطی آورده شده است و با یک مثال نقض، درستی آن را رد کنید.

۶- «همهٔ شکل‌های هندسی دارای حداقل یک زاویه می‌باشند».

حکم بالا درست است یا غلط؟ چگونه ادعای خود را ثابت می‌کنید؟

۷- استفاده از شهود چه کاربردهایی در ریاضیات دارد؟

۸- الف) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که غلط بوده است بنویسید.

ب) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که درست بوده است بنویسید.

۹- درستی یا نادرستی هریک از استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

احمد می‌داند که هر وقت باران بیارد حیاط خانه آنها خیس می‌شود.

الف) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس شده است و نتیجه گرفت که حتماً باران باریده است.

ب) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس نیست و نتیجه گرفت باران نباریده است.
۱۰- هر وقت دو چرخهٔ علی پنجر شود او دیر به مدرسه می‌رسد. علی دیر به مدرسه رسیده است پس حتماً دو چرخه‌اش پنجر شده است.

کدام استدلال زیر مشابه استدلال بالاست.

هر وقت معلم ریاضی به کلاس A می‌رود بچه‌های کلاس A خوشحال می‌شوند.

الف) بچه‌های کلاس A خوشحال نیستند پس معلم ریاضی به کلاس آنها نرفته است.

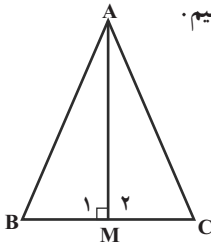
ب) بچه‌های کلاس A خوشحال اند پس معلم ریاضی به کلاس آنها رفته است.

— کدام یک از استدلال‌های الف و ب درست و کدام نادرست است؟

۱۱- آیا استدلال آورده شده برای مسئلهٔ داده شده در زیر درست است؟ علت درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

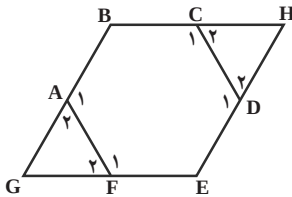
مسئله: مثلث دلخواه $\triangle ABC$ داده شده است. نشان دهید زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باهم برابرند.

استدلال: مانند شکل مقابل از رأس A به وسط ضلع BC عمود می‌کنیم.
بنابراین داریم: $BM = CM$ و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$



حال داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} AM = AM \text{ مشترک} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ BM = CM \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (\text{ض ز ض})$$



۱۲- یک شش ضلعی منتظم و دو مثلث ساخته شده
برروی دو ضلع آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. در زیر
اثباتی آورده شده که نشان می‌دهد دو مثلث مورد نظر همنهشت
هستند. آیا این اثبات درست است؟ آیا می‌توان این مسئله را
تعمیم داده و گفت مثلث‌هایی که به این طریق بر اضلاع یک
چندضلعی منتظم ساخته می‌شوند با هم همنهشت هستند؟ چرا؟

ABCDEF یک شش ضلعی منتظم است: فرض

$$\text{حکم: } \triangle GAF \cong \triangle HCD$$

اثبات: می‌دانیم اگر دو زاویه برابر باشند، مکمل‌های آنها نیز باهم برابرند لذا:

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

$$\hat{F}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{F}_2 = \hat{D}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \\ \hat{F}_2 = \hat{D}_2 \\ AF = CD \end{array} \right. \Rightarrow \triangle GAF \cong \triangle HCD \quad (\text{ض ض ز})$$

۱۳- فرض کنید مدیر یک مدرسه شرط گذاشته است که هریک از کلاس‌های آن مدرسه به شرطی به اردو برده می‌شوند که مجموع نمره‌های انضباط هر دو دانش‌آموز آن کلاس، ۳۴ یا بیشتر از ۳۴ شود. در کدام یک از حالت‌های زیر دانش‌آموزان یک کلاس به اردو برده می‌شوند و در کدام یک برده نمی‌شوند و در کدام یک نمی‌توان تشخیص داد برده می‌شوند یا نه؟

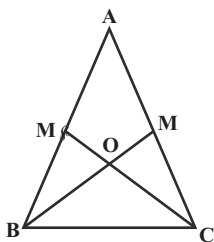
(الف) کمترین نمره انضباط آن کلاس ۱۶ و بیشترین نمره ۲۰ بوده است.
(ب) کمترین نمره مربوط به فردی بوده که ۱۶ گرفته است و بقیه دانش‌آموزان کلاس حداقل ۲ نمره از او بیشتر گرفته‌اند.

(ج) به جز یک دانش‌آموز بقیه کلاس نمره انضباطشان ۲۰ بوده است.

(د) میانگین نمره‌های انضباط کلاس ۱۹ می‌باشد.

(ه) مجموع نمره‌های انضباط دو نفر که هیچ کدام کمترین نمره را نگرفته‌اند ۳۴ بوده است.

۱۴- مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است و پاره‌خط‌های BM و CM میانه‌اند.



(الف) ثابت کنید $\triangle CBM \cong \triangle BCM$ و برای اجزای متناظر را

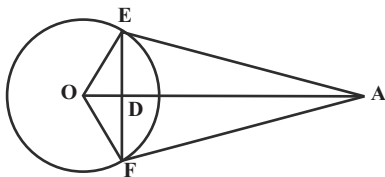
نتیجه‌گیری کنید.

(ب) ثابت کنید $\triangle ACM \cong \triangle ABM$ و برای اجزای متناظر را

نتیجه‌گیری کنید.

(ج) ثابت کنید $\triangle BOM \cong \triangle COM$

۱۵- در شکل مقابل پاره‌خط‌های AE و AF



بر دایره در نقاط E و F مماسند.

(الف) ثابت کنید $\triangle AOE \cong \triangle AOF$ و برای

اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

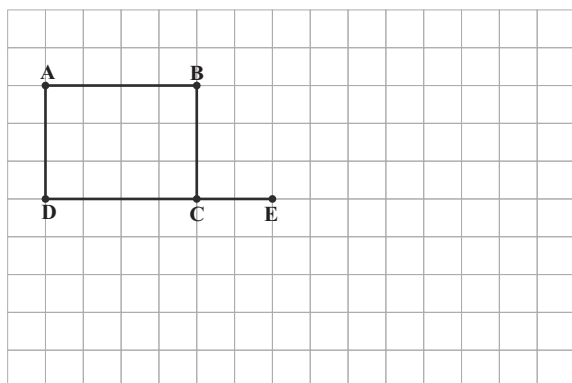
(ب) ثابت کنید $\triangle OED \cong \triangle OFD$

۱۶- دانش‌آموزی قصد دارد یک نقاشی از یک تصویر بزرگ به ابعاد 5×4 متر را در یک

برگه به گونه‌ای بکشد که با تصویر واقعی متشابه باشد و عرض آن برابر 10° سانتی‌متر باشد. طول تصویر چقدر باید باشد؟

۱۷- در سؤال قبل فرض کنید دانش‌آموز موردنظر بخواهد نقاشی همان تصویر را، متشابه با

آن، در برگه‌ای به ابعاد 20×15 بکشد. بزرگ‌ترین ابعاد ممکن از تصویر چند در چند است؟



۱۸- در تصویر مقابل،

مستطیلی رسم کنید که یک ضلع آن

پاره خط CE باشد و متشابه با مستطیل

ABCD باشد. مستطیل حاصل چه

ابعادی می تواند داشته باشد؟

اهداف

- آشنایی با مفهوم استدلال و اثبات
- درک لزوم استدلال
- آشنایی با تفاوت‌های انواعی از استدلال‌ها و تشخیص نحوه استفاده از استدلال‌های مختلف در مسائل گوناگون
- تشخیص آنچه در استدلال‌ها و اثبات‌ها می‌تواند استفاده کند و آنچه در ارائه حدس‌ها و تشخیص راه حل‌ها می‌تواند استفاده کند.
- ابزار مورد نیاز :
- گونیا و خط کش
- کاغذ شفاف

روش تدریس

دادن فرصت به دانش‌آموز جهت تفکر در مورد ساختار استدلال‌های ارائه شده و تفاوت آنها، که باعث تفاوت میزان اعتبار آنها نیز می‌باشد، دارای اهمیت است. یکی از اهداف این است که دانش‌آموز توجه کند در ریاضیات نیز مانند سایر زمینه‌های علمی هر موضوع مورد ادعایی که قبلاً درستی‌اش ثابت نشده است نیازمند استدلال و اثبات می‌باشد. در کار در کلاس اول سعی شده دانش‌آموز در تشخیص استدلال‌های مشابه توانمندتر شود. گرچه نام‌های «استدلال استقرایی» (استدلالی که در آن درستی یک حکم که در چند حالت مشاهده شده به حالت کلی تعمیم داده می‌شود. مانند استدلال ۱ در فعالیت اول) و «استدلال استنتاجی» (که در آن با استفاده از حقایقی که از قبل می‌دانیم و با استفاده از نتیجه‌گیری‌های منطقی درستی موضوع مورد نظر را نشان می‌دهیم. مانند استدلال ۲ در فعالیت اول) مطرح نشده است اما یکی از اهداف تشخیص استدلال‌های مشابه و نیز مقایسه میزان اعتبار هر کدام در اثبات‌های گوناگون می‌باشد.

مثال نقض در این قسمت در حالتی کاربردی مطرح شده است و دانش‌آموز با آن آشنا می‌شود. از اهداف دیگر این درس بالا بردن آگاهی دانش‌آموز در این موضوع است که چه نوع تشخیصی در هندسه چه اهمیتی دارد. مثلاً بداند که تشخیص شهودی و یا تشخیص براساس اندازه‌گیری، می‌تواند در ارائه حدس‌ها و تشخیص راه حل‌ها یاری‌رسان فردی باشد که با مسائل ریاضی سروکار دارد اما به عنوان اثبات در ریاضیات مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

حل تمرین‌ها

۱- خیر. از مشاهده برقراری موضوعی در چند حالت نمی‌توان بدون هیچ دلیلی آن را در حالت کلی درست دانست.

کافی است مثلی مثال بیاوریم که محل برخورد عمود منصف‌هایش درون آن نباشد.

۲- گرچه هیچ کدام از استدلال‌ها نمی‌تواند به عنوان یک اثبات درست، درستی ادعای موردنظر را ثابت کنید، اما استدلال نیما به دلیل مقایسه منطقی که بین تمرینات وزنه‌بردار در دو هفته و نتیجه‌های حاصل، انجام داده است، قابل اعتمادتر از استدلال پژمان است که نتیجه وزنه‌برداری را به موضوعی کاملاً نامرتبط ربط داده است.

۳- استدلال قسمت (ج) مانند استدلال مطرح شده می‌باشد زیرا در هر دوی آنها نتیجه‌ای را که در گذشته همواره برقرار بوده است، به آینده تعمیم داده‌اند.

۴- استدلال اول براساس تجربه‌های یک فرد و برداشت‌های شخصی او انجام شده است اما در استدلال دوم از مقایسه، منطق و نتیجه‌گیری استفاده شده و استدلال استنتاجی درستی ارائه شده است.

سن علی < سن حسن $\Rightarrow$ سن علی < سن حسین < سن حسن

توصیه‌های آموزشی

— هدف کلی این درس آشنایی و درک لزوم استدلال و تشخیص استدلال قابل قبول در مسائل هندسی می‌باشد در این راستا می‌توانید بسته به شرایط کلاس خود از مثال‌های گوناگون استفاده کنید و به مثال‌های ارائه شده در کتاب بسنده نکنید.

— می‌توان دانش‌آموزان را به این مطلب توجه داد که در علوم مختلف میزان اعتبار استدلال‌ها متفاوت است. مثلاً میزان اعتبار استدلال استقرایی در علوم مختلف بسیار متفاوت می‌باشد و در برخی شاخه‌های علوم انسانی و همچنین برخی تحقیقات در علوم پزشکی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اهداف

- تشخیص فرض و حکم مسئله و بیان برخی فرض‌ها و حکم‌ها به زبان ریاضی
- آشنایی با برخی استدلال‌های هندسی و نوشتن منظم آنها
- توانایی در نظر گرفتن کلیت برخی اثبات‌های هندسی داده شده، تأمل به اجزا و نتیجه‌گیری‌های موجود در دل آن، و تشخیص نواقص احتمالی موجود در اثبات (در اثبات‌هایی که کاملاً درست نمی‌باشند)
- آشنایی با مفهوم تعمیم و شرایط استفاده از آن در برخی مسائل هندسی و توانایی به کارگیری آن در برخی مسائل
- تشخیص تفاوت میزان اعتبار برخی استدلال‌های هندسی
- آشنایی با برخی نتیجه‌گیری‌های منطقی مورد استفاده در استدلال‌های هندسی

روش تدریس

تشخیص فرض و حکم از دل مسئله و بازنویسی آنها به‌طور منظم و نیز در نظر گرفتن واقعیات مرتبط با مسئله که از قبل درستی آنها پذیرفته شده است می‌تواند به نظم ذهنی دانش‌آموز در ارائه یک استدلال مناسب کمک نماید. لذا دستیابی دانش‌آموز به چنین توانایی از اهداف این درس می‌باشد. در فعالیت دوم این درس مسئله‌ای به همراه استدلالی برای درستی آن آمده است که استدلال مورد نظر دارای نقص می‌باشد. این‌گونه مسائل از آنجا که دانش‌آموز را درگیر نوشتن استدلال و دغدغه درستی شیوه نوشتار و استفاده از علائم ریاضی نمی‌کند می‌تواند تمرکز بیشتر دانش‌آموز را معطوف به ساختار اثبات و اجزای لازم آن نماید. تشخیص درستی یا نادرستی استدلال آورده شده و در صورت نادرستی تشخیص علت آن، می‌تواند تقویت‌کننده دقت و تفکر دانش‌آموز باشد، لذا آوردن چنین سؤالاتی در ارزشیابی‌ها مفید می‌باشد. در ادامه فعالیت دوم این درس با ارائه خاصیتی از نیمساز زاویه بین دو ساق از مثلث متساوی‌الساقین که آن را نمی‌توان به نیمسازهای دیگر تعمیم داد و سپس ارائه خاصیتی از قطر یک مربع که آن را می‌توان به قطر دیگر تعمیم داد، دانش‌آموز را برای درک این نوع تعمیم و شرایط لازم برای آن آماده می‌کنیم.

در کار در کلاس دوم با توجه به مطالب درس قبل دانش‌آموز می‌تواند تفاوت اعتبار انواع استدلال‌ها را مقایسه کند و به لزوم آوردن استدلالی که در حالت کلی و به درستی حکم مسئله را نتیجه دهد بیشتر پی ببرد.

در آخرین فعالیت این درس یک مسئله کلاس که می‌تواند اثبات جبری ساده‌ای داشته باشد و یا توسط برخی دانش‌آموزان به صورت ذهنی جواب داده شود و یک مسئله هندسی، شبیه‌سازی شده‌اند تا بدین طریق علاوه بر کمک به درک بیشتر اثبات مسئله هندسی دانش‌آموز با این گونه شبیه‌سازی نیز آشنا شود.

حل تمرین‌ها

۱- خیر، زیرا مسئله در حالت کلی و برای هر مثلث دلخواه مطرح شده است، اما اثبات آن در حالت کلی و برای هر مثلث دلخواه آورده نشده است.

۲- دلیل نرگس درست است زیرا طبق تعریف برای محدب بودن، باید تمام پاره‌خط‌های حاصل از وصل هر دو نقطه درون شکل، کاملاً درون شکل باشند پس با یافتن یک پاره‌خط که چنین نباشد نتیجه می‌شود که چندضلعی محدب نیست.

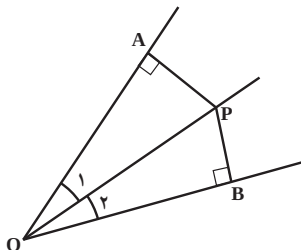
— دلیل مهدیه درست نیست زیرا طبق تعریف چندضلعی محدب باید همه پاره‌خط‌های مذکور درون چندضلعی باشند تا چندضلعی محدب باشد و با قرار گرفتن تنها یک یا چند پاره‌خط در درون چندضلعی، نمی‌توان چنین نتیجه‌ای گرفت.

— دلیل مریم نیز به همان دلیل که دلیل مهدیه درست نبود، درست نیست، گرچه این چندضلعی واقعاً محدب است.

۳- الف) خیر، زیرا $ABCD$ می‌تواند متوازی‌الاضلاع باشد که زاویه قائمه نداشته باشد. (گزاره اول می‌گوید که مستطیل، متوازی‌الاضلاع است. در مورد متوازی‌الاضلاع چیزی نمی‌گوید.)

ب) خیر. زیرا $ABCD$ می‌تواند لوزی‌ای باشد که زاویه قائمه نداشته باشد. (گزاره اول اطلاعاتی در مورد مربع‌ها می‌دهد. در مورد $ABCD$ که مربع نیست چیزی نمی‌گوید.)

ج) بله. $ABCD$ مربع نیست زیرا اگر مربع باشد طبق گزاره اول باید ضلع‌هایش باهم برابر باشند که مخالف گزاره دوم است.



۴- زاویه دلخواهی و نقطه‌ای مانند P روی نیمساز آن زاویه مانند شکل مقابل در نظر گرفته و از نقطه مورد نظر به دو ضلع آن زاویه عمود می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (OP نیمساز است)} \\ \text{(مشترک)} \quad OP = OP \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAP \cong \triangle OBP \Rightarrow PA = PB$$

وتر و یک زاویه حاده

لذا فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه یکی است. از آنجا که تمام خواصی که در این اثبات استفاده کردیم برای سایر نقاط روی نیمساز برقرار است لذا این خاصیت را می توان به سایر نقاط روی نیمساز تعمیم داده و بگوییم: «هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه، به یک فاصله است.»

توصیه های آموزشی

در برخی موضوعات این درس بحث ها و نتیجه گیری های منطقی مطرح شده است که در اثبات های هندسی جایگاه خاصی دارند لذا توجه کافی به ایجاد درکی مناسب از این مباحث در ذهن دانش آموزان اهمیت دارد.

در بحث تعمیم می توان از مثال هایی از زندگی روزمره (مثلاً خواصی که برخی اشیاء یا موجودات دارند و می توان به برخی دیگر تعمیم داد و به برخی دیگر نمی توان تعمیم داد) برای کمک به فهم بهتر شرایط تعمیم استفاده کرد.

اهداف

- یادآوری مفهوم و حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها
- تشخیص اجزای متناظر از دو مثلث همنهشت
- آشنایی با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها در حل برخی مسائل هندسی
- استفاده از زبان ریاضی در نوشتن استدلال‌ها به صورت منظم

روش تدریس

در ابتدای فصل حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها که در پایه هشتم آورده شده است یادآوری می‌شود و نوشتن آنها به صورت منظم و با استفاده از زبان ریاضی مدنظر می‌باشد.

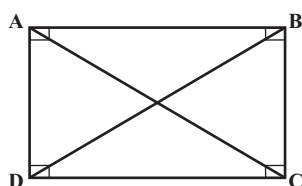
در فعالیت اول هدف تقویت توانایی تشخیص اجزای متناظر از دو مثلث همنهشت می‌باشد، بسته به وضع کلاس می‌تواند مثلث‌های همنهشت در شکل‌های پیچیده‌تر نیز برای تشخیص اجزای متناظر، مطرح شوند، در فعالیت دوم برای حل مسئله می‌توان از همنهشتی دو مثلث که با رسم پاره‌خط‌های AC و BD به وجود می‌آیند، استفاده کرد. در هر دو راه حل مطرح شده در این قسمت از این موضوع که زوایای C و D محیطی و روبه‌رو به قطر دایره هستند و بنابراین قائمه‌اند استفاده شده است. در فعالیت سوم نیز با توجه به خواص لوزی (چهار ضلع برابرند. زوایای روبه‌رو برابرند.) و با توجه به اینکه $BN = DM$ (زیرا هر کدام از آنها برابر با نصف ضلع لوزی است، بنابراین این دو پاره‌خط باهم برابرند) همنهشتی دو مثلث ABN و ADM به حالت (ض‌ض) نتیجه می‌شود.

در کار در کلاس نیز مسئله‌ای مطرح شده که کارایی استفاده از همنهشتی مثلث‌ها را نشان می‌دهد. یادآوری به دانش‌آموز که اثبات قابل قبول هندسی کدام است، متوجه کردن دانش‌آموز به تفاوت تعریف یک چندضلعی و خواص آن و استفاده از زبان ریاضی در نوشتن منظم استدلال در این کار در کلاس مدنظر می‌باشد. پس از نشان دادن همنهشتی دو مثلث ABD و CBD چگونگی یافتن اجزای متناظر دیگر در دو مثلث مطرح شده است، بدین صورت که اضلاع مقابل به دو زاویه متناظر از دو مثلث باهم برابرند و برعکس زاویه‌های مقابل به دو ضلع متناظر از دو مثلث باهم برابرند. در ادامه سؤال شده است که آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم. هدف از این سؤال یادآوری تعمیم یک خاصیت که در درس قبل مطرح شده می‌باشد. با توجه به اینکه تمام خواص استفاده شده در این اثبات برای قطر دیگر نیز برقرار هستند لذا می‌توان نتیجه گرفته شده را به قطر دیگر تعمیم داد. در انتهای کار در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شده است که با توجه به همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، برابری زاویه‌های مقابل در متوازی‌الاضلاع را نیز نتیجه بگیرند.

حل تمرین‌ها

۱- قبلاً ثابت شد که اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع باهم برابرند، لذا $AB = DC$. از طرفی

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB \parallel DC \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad AB = DC \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ز)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$



۲- حل : مستطیلی مانند شکل مقابل در نظر می‌گیریم :

می‌توان فرض و حکم را به این صورت نوشت

ABCD مستطیل است : فرض

حکم : $AC = BD$

داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = AB \\ AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ABC \Rightarrow BD = AC$$

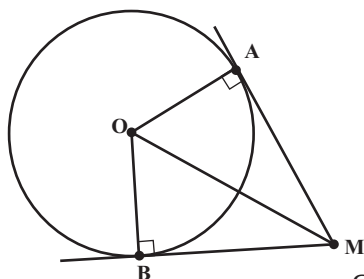
۳- مثلث‌های AMB و AMC به حالت سه ضلع (ض ض ض) همنهشت هستند.

$$\triangle AMC \cong \triangle AMD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \text{AM نیمساز است} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow AM \perp BC$ (چون $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ باهم برابرند و جمعشان 180° است)

۴- می‌دانیم که طبق تعریف مماس، شعاع OA بر مماس

MA عمود است. به همین ترتیب $OB \perp MB$



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = r \text{ (وتر و یک ضلع)} \\ OM = OM \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow MA = MB$$

۵- استدلال آورده شده دارای نقص می‌باشد زیرا ادعا شده دو مثلث به حالت (ض‌ض) همنهشت هستند در حالتی که زاویه‌های O_1 و O_2 بین دو ضلع نوشته شده در استدلال، قرار ندارند. همنهشتی این دو مثلث را می‌توان به حالت وتر و یک ضلع نتیجه گرفت.

توصیه‌های آموزشی

در مواردی دیده می‌شود دانش‌آموزان از طریق سپردن نام زاویه‌ها و ضلع‌ها به ذهن یا در خاطر نگاه داشتن شکل خاصی و یا پیدا کردن شباهت‌هایی بین نام زاویه‌های متناظر و حفظ حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها اثبات‌هایی برای برخی مسائل می‌نویسند در حالی که درک درستی از همنهشتی و تناظر موجود بین اعضای دو چندضلعی همنهشت نیافته‌اند. لذا توجه به اهمیت درک مفهوم همنهشتی و تشخیص اجزای متناظر از دو چندضلعی همنهشت الزامی است.

در برخی موارد با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با تبدیل‌های انتقال، تقارن و دوران، پس از مشخص شدن همنهشت بودن دو چندضلعی می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا تبدیلاتی که دو شکل را برهم منطبق می‌کنند مشخص کنند.

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

هدف: آشنایی با برخی راهکارهای حل مسائل هندسی

ابزار مورد نیاز: خط کش و گونیا

روش تدریس

چهار کار اساسی که می‌تواند به حل مسائل هندسی کمک کند بیان شده است که عبارت‌اند از فهم مفاهیم مطرح شده در مسئله، رسم شکل (در صورت لزوم)، تشخیص داده‌ها (فرض) و خواسته‌های (حکم) مسئله، و با استفاده از تمام اینها یافتن راه حلی که به کمک آن حکم مسئله را اثبات کنیم. در بسیاری از سؤال‌های مطرح شده در هندسه اثبات برابری دو پاره خط خواسته شده است و در بسیاری از آنها کافی است دو مثلث که پاره‌خط‌های مذکور اجزای متناظر در آن دو مثلث باشند بیابیم و ثابت کنیم دو مثلث هم‌نهشت هستند.

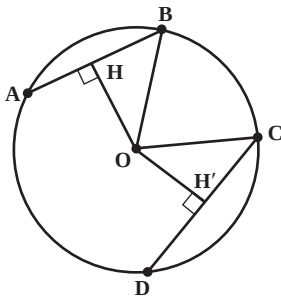
در قسمت ۱ از فعالیت کافی است با وصل کردن نقاط A و B و C و D به مرکز دایره، دو مثلث OAB و OCD، که به حالت سه ضلع هم‌نهشت هستند، به دست آوریم و از هم‌نهشتی آنها برابری زاویه‌های تشکیل شده در نقطه O از دو مثلث را نتیجه بگیریم و از آن برابری کمان‌ها را. در قسمت ۲ فعالیت دوباره همان مثلث‌ها را تشکیل می‌دهیم چون کمان‌ها برابرند لذا زاویه‌های تشکیل شده در نقطه O از دو مثلث باهم برابرند و دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت خواهند بود و لذا ضلع سوم آنها که همان وترها می‌باشند نیز برابرند.

در قسمت ۳ فعالیت، از O به وترهای AB و CD عمود

می‌کنیم. کافی است نشان دهیم $OH = OH'$.

می‌دانیم HB نصف AB است و $H'C$ نصف CD است، از

طرفی طبق فرض $AB = CD$



بنابراین

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \Rightarrow HB = H'C$$

$$\left. \begin{array}{l} HB = H'C \\ H = H' = 90^\circ \\ OB = OC = r \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OHB \cong \triangle OH'C \Rightarrow OH = OH'$$

حل تمرین‌ها

۱-

$$AB = CD \Rightarrow \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}CD \Rightarrow MB = PD$$

$$AD = BC \Rightarrow \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}BC \Rightarrow DQ = BN$$

$$\left. \begin{array}{l} MB = PD \\ DQ = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \Rightarrow \triangle MBN \cong \triangle PDQ \Rightarrow MN = PQ \end{array}$$

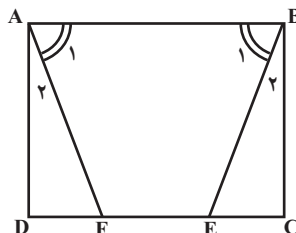
۲-

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \text{ (زاویه بین شعاع و مماس)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ز)} \\ \Rightarrow \triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow AD = BC \end{array}$$

۳- می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند. لذا $\hat{B} = \hat{C}$

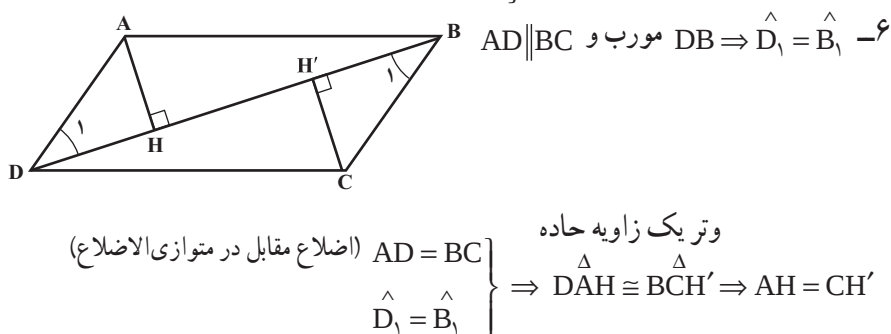
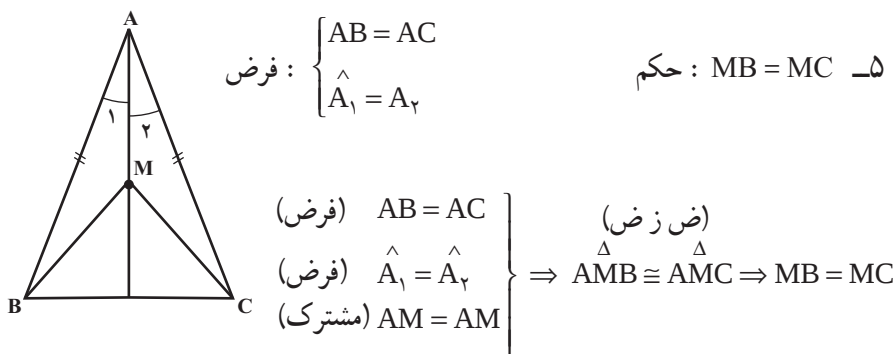
$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BM = CN \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ض)} \\ \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACN \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN \text{ متساوی الساقین است} \end{array}$$

۴-



$$\cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{B}_1} + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ز)} \\ \Rightarrow \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow AF = BE \end{array}$$



در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل از قطر بین آنها به یک فاصله اند.

توصیه‌های آموزشی

گاهی آنچه می‌تواند به تسلط یافتن دانش‌آموزان کمک کند، بازگشت پس از حل مسئله به آن است. به گونه‌ای که مسئله را از آخر در نظر بگیریم و با تشریح آن، به درک علت هر کدام از اقدام همان در طول حل مسئله، توسط دانش‌آموز، کمک کنیم.

اشتباهات رایج

گاهی دانش‌آموزان برای حل مسئله خواسته شده به حل زیرمسئله‌ای می‌پردازند، مثلاً برای نشان دادن برابری دو پاره‌خط دو مثلث تشکیل داده و نهایتاً همنهشتی آنها را ثابت می‌کنند، اما از نتیجه گرفتن حکم اصلی که برابری پاره‌خط‌هاست غافل می‌شوند. برای رفع این اشتباه می‌توان به دانش‌آموزان گوشزد کرد که همواره حکم مسئله را در نظر داشته باشند.

اهداف

- آشنایی با مفهوم تشابه
- درک روابط بین اندازه های اجزاء در دو شکل متشابه
- تشخیص متشابه بودن در چندضلعی
- توانایی رسم چندضلعی متشابه با یک چندضلعی ساده داده شده

ابزار مورد نیاز :

گونیا و خط کش، کاغذ شطرنجی

روش تدریس

در شروع درس پیش از آنکه به یکباره معنی دقیق تشابه در دو شکل ارائه شود سعی می کنیم دانش آموز با تشخیص خود تفاوت رعایت و عدم رعایت تناسب اندازه ها را در شکل های متشابه و غیر متشابه متوجه شود و بر روی ویژگی هایی که دو شکل متشابه دارند فکر کند، هرچند نداند که متشابه هستند. در ادامه با ارائه چندضلعی های متشابه در صفحه شطرنجی و درخواست اندازه گیری اضلاع و زاویه ها سعی می کنیم دانش آموزان را در پی بردن به ویژگی های دو شکل متشابه یاری کنیم. در ادامه فعالیت سعی شده دانش آموزان بیشتر با خواص شکل های متشابه آشنا شوند و سپس تعریف شکل های متشابه و نهایتاً تعریف نسبت تشابه ارائه شده است.

حل تمرین ها

۱- چندضلعی های متشابه زیادی وجود دارند. مثلاً GDH و HEI و ABD و EBC و LHM باهم متشابهند و AFH و BGI و CHJ و HOP و HAC باهم متشابهند و GHLK و HINM و DBEH نیز باهم متشابهند.

۲- بله، نسبت تشابه برابر ۱ است.

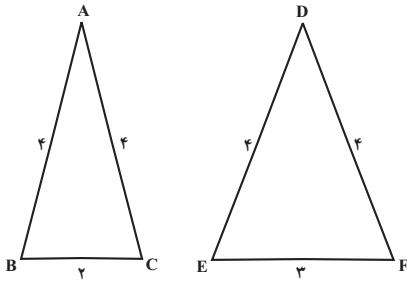
۳- خیر، به طور مثال مربع یک نوع لوزی است و با لوزی ای که زاویه قائمه ندارد متشابه نیست.

$$۴- ۷۰۰ = ۲۰۰ \times \frac{۳}{۵}$$

۵- بله، زیرا تمام زاویه ها برابر ۶۰ است و چون در هر مثلث سه ضلع برابرند پس نسبت های

اضلاع در دو شکل نیز یکی خواهد بود.

۶- خیر، مثلاً دو مثلث مقابل متشابه نیستند
زیرا اضلاع به یک نسبت تغییر نکرده‌اند.



۷- با توجه به متشابه بودن دو مثلث داریم :

$$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{10} = \frac{8}{x+7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=8 \\ x+7=16 \end{cases} \Rightarrow x=9$$

۸- مثلث ABC با مثلث پایین سمت راست متشابه است.

توصیه‌های آموزشی

همانگونه که از شکل ارائه مفهوم تشابه در این درس مشخص است، توجه به درک مفهوم تشابه اهمیت ویژه‌ای دارد و در این پایه حل مسائل تشابه صرفاً در حدی که در درس و تمرین‌ها ارائه شده است مدنظر می‌باشد لذا می‌توان با ارائه مثال‌های کاربردی بیشتر از درک مفهوم تشابه دو شکل توسط دانش‌آموزان اطمینان حاصل نمود.



توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)

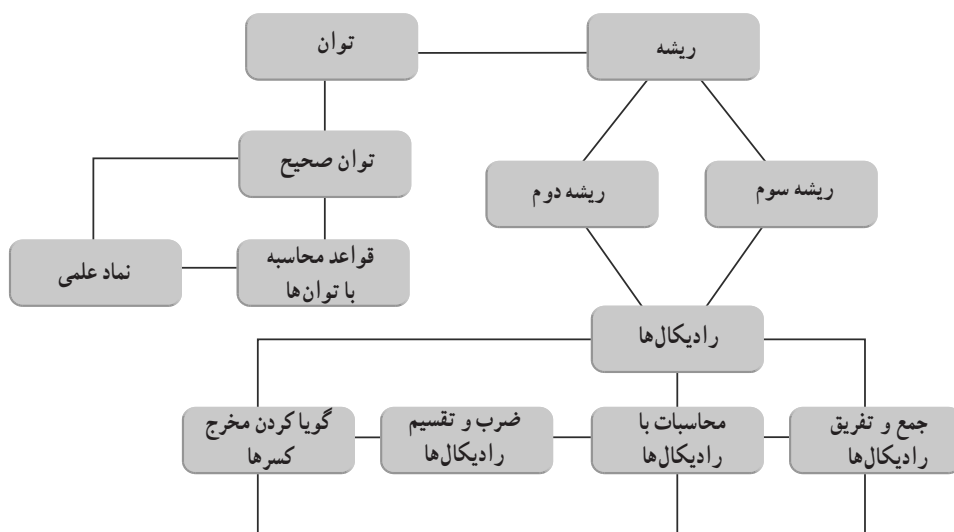


یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $3/3 \times 10^{19}$ نمایش
داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

نگاه کلی به فصل

دانش آموزان از سال هفتم با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اند. در سال هشتم نیز ضمن تعمیق مفاهیم، برخی قواعد و رویه‌ها آموزش داده شده است. همچنین دانش آموزان در سال‌های هفتم و هشتم با مفهوم جذر و روش تقریبی محاسبه آن آشنا شده‌اند. ریشه‌های دوم یک عدد نامنفی نیز در طی این دو سال مطرح شده است. در کتاب ریاضی پایه نهم توان صحیح و ریشه سوم یک عدد در فصل چهارم آموزش داده می‌شود. همچنین نماد علمی و برخی محاسبات در مورد رادیکال‌ها و قواعدی در مورد کار با عبارت‌های رادیکالی مطرح می‌شود. لازم به ذکر است که در این کتاب تأکیدی بر ریشه‌های بالاتر از سه وجود ندارد و در سال‌های بعد به موازات معرفی توان‌های گویا در مورد ریشه‌های بالاتر از ۳ نیز بحث و گفت‌وگو خواهد شد.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

اعداد تواندار از جمله مباحث پرکاربرد در ریاضیات می‌باشد. در دوره‌های مقدماتی اعداد تواندار با توان طبیعی، ارتباط بین توان و ضرب را نشان می‌دهند. در پایه‌های بالاتر، اعداد تواندار با توان منفی اتصالی بین توان و کسر برقرار می‌کنند و در ادامه اعداد تواندار با توان گویا اتصال بین

توان و ریشه‌گیری را نشان می‌دهند. اعداد تواندار با توان گنگ رابطه‌ای بین توان و حد یک دنباله را نشان می‌دهند (سلطانی، ۱۳۹۲).

عددهای حقیقی را می‌توان به دو دسته گویا و گنگ تقسیم‌بندی کرد. علاوه بر این یک دسته‌بندی دیگر نیز وجود دارد: عددهای جبری و عددهای متعالی. عددهای جبری اعدادی هستند که جواب‌های معادله‌های جبری با ضرایب‌های صحیح هستند و بقیه عددهای باقیمانده، عددهای متعالی نامیده می‌شوند. بعضی از عددهای جبری گویا و برخی گنگ هستند، اما همه عددهای متعالی گنگ هستند. برخلاف عددهای گویا که نسبت به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به‌جز صفر) بسته هستند، عددهای گنگ از این ویژگی برخوردار نمی‌باشند. اگر x یک عدد گنگ و γ عدد گویایی غیر از صفر باشد، آنگاه γx ، $x - \gamma$ ، $x + \gamma$ و $\frac{x}{\gamma}$ عددهای گنگی خواهند بود. همچنین $-\alpha$ و α^{-1} نیز گنگ هستند.

بنابراین با توجه به گنگ بودن مثلاً $\sqrt{3}$ می‌توان گنگ بودن همه اعداد زیر را نتیجه گرفت:

$$-\sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3} + \gamma, \quad 5 - \sqrt{3}, \quad -2\sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{5}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}}$$

معرفی منابع برای معلمان

- اعداد گویا و گنگ، ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- ساویزی، بهناز و شاهورانی، احمد (۱۳۹۳). ردپای مبهم اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان، رشد آموزش ریاضی شماره ۱۱۵.

مسیرهایی برای توسعه

برخی از مسائل مطرح شده در ادامه، ویژه دانش‌آموزانی است که توانایی فراتری دارند و برای آزمون‌های کلاسی معمول توصیه نمی‌شوند.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\bar{A}) \frac{(0/6)^0 - (0/1)^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{4} \right)^{-1} \times \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right] + \left(-\frac{1}{3} \right)^{-1}}$$

$$\text{ب) } \left[-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} \right]^{-1} + \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right]^{-1}$$

۲- اگر x یک عدد حقیقی باشد در مورد اینکه کدام یک از x^2 و $x^{\frac{2}{3}}$ بزرگ ترند بحث کنید.

$$\text{۳- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید: } \left(\frac{8}{7-4}\right) \div \left(\frac{4^3}{7-2}\right)$$

۴- در معادله $2^x + 2^{x+1} = 96$ مقدار x چقدر است؟

۵- حاصل ضرب عددی در مجذورش 10^{-3} است. آن عدد را به دست آورید.

۶- علامت دو عدد $A = [-(-4)^{-2}]^{-4}$ و $B = [-(-5)^2]^5$ کدام است؟

(۱) A مثبت و B منفی (۲) A منفی و B مثبت

(۳) A و B هر دو مثبت (۴) A و B هر دو منفی

۷- مجذور عبارت $\frac{2 \times 10^{\circ} / 10^{\circ}}{10^{\circ} \times 10^{\circ}}$ را به دست آورید.

۸- حاصل عبارت زیر را به دست آورید: $(x < 0)$

$$\frac{\sqrt{x^2} - x}{x^2}$$

۹- اگر $x < 0$ حاصل عبارت مقابل را بدون قدر مطلق بنویسید.

۱۰- حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$5\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54} + 7\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{16}$$

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد تواندار بنویسید:

$$\text{آ) } \left(\frac{12}{8}\right)^5 \times \left(\frac{4}{16}\right)^{-5} \quad \text{ب) } 14^{-2} \div \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

۲- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\text{آ) } (-x^{-2}y)^{-3} \quad \text{ب) } 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1}$$

۳- ساده شده کسر مقابل چقدر است؟

$$\frac{25^{-2} \times 2^{-6}}{2^{-7} \times 5^{-4}}$$

۴- هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

$$283 =$$

$$1400 =$$

$$0.000301 =$$

$$28/345 =$$

۵- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید :

$$2/4 \times 10^{-5} =$$

$$7/9 \times 10^5 =$$

$$3/0.1 \times 10^{-6} =$$

$$8/234 \times 10^6 =$$

۶- اگر $x > 0$ و $y < 0$ حاصل عبارت $\sqrt{(xy)^2}$ برابر کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

$$-xy \text{ (ب)}$$

$$xy \text{ (آ)}$$

$$-125 \text{ و } 8, 15$$

۷- ریشه سوم اعداد روبه‌رو را به دست آورید.

۸- حاصل را به دست آورید :

$$\text{آ)} \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{4}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{ب)} \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32}}{\sqrt{16}}$$

۹- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\text{آ)} (\sqrt{8} + \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{2})$$

$$\text{ب)} \sqrt{27} + \sqrt{12} + \sqrt{72} - \sqrt{32}$$

۱۰- مخارج کسرهای زیر را گویا کنید :

$$\text{آ)} \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{ب)} \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{ج)} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}$$

۱۱- در جای خالی علامت مناسب $<$ یا $=$ یا $>$ بگذارید :

$$\text{آ)} \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} \bigcirc \sqrt{3}$$

$$\text{ب)} \sqrt{8^2 + 6^2} \bigcirc \sqrt[3]{1000}$$

$$\text{ج)} \sqrt{2} + \sqrt{3} \bigcirc \sqrt{25}$$

هدف: آشنایی با توان منفی یک عدد (ناصفر)

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های طبیعی یک عدد و نیز توان صفر، به کمک فعالیت داده شده می‌توان توان منفی یک عدد (غیرصفر) را آموزش داد. در واقع به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۰ و با کمک الگویی باید به دانش‌آموزان کمک کرد تا اعداد داده شده در جاهای خالی را حدس بزنند. هم‌سطرهای اول جدول و هم‌سطرهای دوم آن باهم ارتباط دارند. ضمناً هر عدد در سطر بالا با عدد توانی زیر آن در سطر دوم ارتباط دارد. انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به آگاهی خود از عددهای صحیح در جاهای خالی اعداد -۱ ، -۲ ، -۳ ، -۴ و -۵ را حدس بزنند. در نهایت توان صحیح و قاعده مربوط به آن به صورت رسمی تر و در قالب یک قاعده کلی بیان شده است. باید به دانش‌آموزان برای حل کار در کلاس‌ها فرصت داد و حتی در مورد راه حل‌های دیگر دانش‌آموزان از آنها نظر خواست. بسیاری از مسائل و تمرین‌ها نیاز به تکمیل توسط دانش‌آموز دارد. دبیر محترم با توجه به سطح کلاس و نیاز راهنمایی لازم را ارائه خواهد کرد.

در تمرین ۱ صفحه ۶۳ برخی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان به چالش کشیده می‌شوند. مثلاً خیلی از دانش‌آموزان حاصل $۳^{-۲}$ را برابر $۶-$ می‌گیرند. باید دلیل نادرستی این پاسخ توسط دانش‌آموزان توضیح داده شود.

در تمرین ۳ برای مقایسه عددهای داده شده باید ابتدا آنها را برحسب توانی از ۲ بنویسند، در تمرین ۵ باید مقدار x را به کمک حدس زدن یا حل معادله به دست آورند.

توصیه‌های آموزشی

برای اینکه از توانایی دانش‌آموزان اطمینان حاصل کنید مناسب است پس از بررسی و حل تمرین‌ها از آنها بخواهید که مسائل مشابهی را برای دوستانشان طرح کنند. همچنین تأکید بر گفت‌وگو کلاسی و ارائه دلیل از سوی دانش‌آموزان بسیار ضروری است.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان توان منفی یک عدد را در خود عدد ضرب می‌کنند. برخی دیگر علامت توان منفی را در علامت عدد ضرب می‌کنند.

اهداف

- نمایش یک عدد به صورت نماد علمی
- نوشتن نمایش اعشاری عددی که نماد علمی آن داده شده است.
- ساده کردن برخی محاسبات

روش تدریس

نماد علمی دارای کاربردهای فراوانی در ریاضیات و سایر علوم است. به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۵ ابتدا دانش‌آموزان مشاهده می‌کنند که هنگام ضرب یا تقسیم یک عدد در توانی از ۱۰ یا بر توانی از ۱۰ چه اتفاقی رخ می‌دهد. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا این محاسبات را انجام دهند و نتیجه را با زبان خود بیان کنند. اگر لازم شد عددهای دیگری مثال بزنید و حتی در صورت لزوم پاسخ دانش‌آموزان را دقیق نمایید. در بخش دوم فعالیت صفحه ۶۵ مثالی کاربردی از سرعت نور ارائه شده است که لزوم استفاده از نماد علمی را نشان می‌دهد. سادگی در محاسبات، و نمایش اعداد و نیز هماهنگی و نظم از ویژگی‌های کار با نماد علمی است.

در صفحه ۶۷ تمرین ۱- الف) داریم:

$$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 25}{6^{-5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \times 25 = 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 800$$

تمرین ۸، یک سؤال باز پاسخ است. یک روش برای حل این تمرین، این است که دانش‌آموزان با جایگذاری اعداد صحیح درستی نامساوی‌ها را بررسی کنند. مثلاً عددهای ۱۰ و ۱ را آزمایش کنند.

توصیه‌های آموزشی

ارائه مثال‌های کاربردی به دانش‌آموزان لزوم کار با نمادهای علمی را توجیه‌پذیر می‌نماید. همچنین می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که برخی محاسبات را بدون استفاده از نماد علمی انجام دهند تا به مشکلات احتمالی بیشتر واقف شوند.

اشتباهات رایج

برخی از دانش‌آموزان هنگام ضرب یک عدد در توانی از ۱۰ یا هنگام تقسیم آن بر توانی از ۱۰ ،

در تعیین جای ممیزها دچار اشتباه می‌شوند. همچنین، برخی مشکلات مربوط به درک اعداد اعشاری در هنگام کار با نماد علمی خود را نمایان می‌سازد. به‌طور مثال برخی از آنها صفرهای بعد از ممیز را در عددی مانند $۰/۰۰۰۱$ یا $۳/۰۰۰۱$ به حساب نمی‌آورند.

هدف: آشنایی با ریشه سوم یک عدد

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش آموزان با ریشه های دوم یک عدد، فعالیت صفحه ۶۸ بر همین مبنا طراحی شده است. در جدول اول صفحه ۶۸ ریشه های دوم هر عدد در سطر بالا و عدد مورد نظر در سطری پایین داده شده است. با توجه به جاهای خالی ارتباط دوطرفه بین هر عدد و ریشه های دوم آن برقرار می شود. در جدول دوم با تکمیل جاهای خالی موضوع ریشه سوم آموزش داده می شود. نوع ستون های جدول دوم نشان می دهند که یک عدد بیش از یک ریشه سوم ندارد. توضیحات بالای صفحه ۶۹ موضوع آموزش ریشه سوم را تمام خواهد کرد. سعی کنید به صورت تعاملی و با گفت و گو این بحث را در کلاس مطرح کنید. در مورد ضرب و تقسیم رادیکال ها (با ریشه های سوم) که در صفحه ۷۰ مطرح می شود، شیوه کار همانند آموزش ضرب و تقسیم رادیکال ها (ریشه دوم) در پایه هشتم است. البته کار در کلاس صفحه ۷۰ نشان می دهد که رابطه برای جمع رادیکال ها (ریشه سوم) برقرار نمی باشد.

تمرین ۵ صفحه ۷۲/ هدف این تمرین حل نامعادله نیست. بلکه حدس و آزمایش عددها و بررسی درستی نامساوی است. ممکن است برخی دانش آموزان متوجه شوند که جواب های بی شماری برای مسئله وجود دارد. بحث و گفت و گوی کلاسی مفید است.

تمرین ۶ صفحه ۷۲/ بهتر است برحسب اینکه x یک عدد مثبت یا منفی باشد بحث شود.

توصیه های آموزشی

باید به پاسخ های نادرست دانش آموزان هم بها داد و اگر اشتباهات در کلاس درس مطرح و برطرف شوند دیگر شاهد تکرار آنها در امتحانات نخواهیم بود. توصیه اکید این است که قبل از درک مناسب ریشه سوم و اعمال روی آنها به ریشه های بالاتر پرداخته نشود. به طور رسمی هدف این کتاب آموزش ریشه های بالاتر نیست.

اشتباهات رایج

یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان برابر گرفتن عبارت های $(\sqrt{x})^2$ و $\sqrt{x^2}$ است. اشتباه دیگر این است که عبارتی مانند $\sqrt{4}$ را برابر ± 2 در نظر می گیرند.

هدف: محاسبات با رادیکال‌ها و ساده کردن جملات متشابه

روش تدریس

فعالیت صفحه ۷۳ سعی دارد که ارتباطی بین جبر و هندسه برقرار نماید و از دانش قبلی دانش‌آموزان بهره برد. همچنین ضرورت تسلط بر محاسبات به کمک رادیکال‌ها را نشان دهد. در این فعالیت به کمک رابطه فیثاغورس طول ضلع مربع به دست می‌آید و از آنجا محیط و مساحت مربع حساب می‌شود.

در کار در کلاس نمونه‌ای از جمع و تفریق رادیکال‌ها ارائه شده است و بقیه موارد باید توسط دانش‌آموزان انجام شود. توجه دانش‌آموزان به شرایط لازم برای جمع یا تفریق دو یا چند عبارت رادیکالی مهم است. در صفحه ۷۴ برای محاسبات رادیکالی فعالیتی طراحی شده است که باید دانش‌آموزان آن را کامل نمایند. مقایسه روش‌های حل مختلف که به پاسخ یکسانی منجر می‌شوند برای دانش‌آموزان بسیار آموزنده خواهد بود در گویا کردن مخرج رادیکال‌ها نیز هدف مطرح کردن عبارت‌های پیچیده و استفاده از اتحادهای جبری مطرح نشده در کتاب نیست. تأکید باید در سطح ارائه شده در کتاب درس باشد.

توصیه‌های آموزشی

هدف اصلی این فصل آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های صحیح یک عدد (غیر صفر) و نیز آشنایی با ریشه سوم است. آشنایی با توان‌های گویا و ریشه‌های بالاتر در سال دهم انجام خواهد گرفت. توصیه می‌شود که زودتر از موعد به این موارد پرداخته نشود و در عوض بر مباحث مطرح شده در کتاب تأکید شود.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان حاصل دو عبارت $\sqrt[3]{-8}$ و $\sqrt[3]{(-8)^2}$ را برابر در نظر می‌گیرند. برخی از اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد رادیکال‌ها به مشکلات آنها در مفهوم توان بازمی‌گردد.

حل تمرین های فصل ۴

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) 3^{-2} $\begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ب) 3^{-1} $\begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1}$$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1}$ $\begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

$$3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$$

د) $3^{-1} + 4^{-1}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 3^{-1} + 4^{-1} &= \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ه) 5^{-2} $\begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

و) $(-2)^3$ $\begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

$$100 \times 10000 = 1000000 = 10^6 \text{ گرم}$$

$$10^6 \div 10^{-24} = 10^6 \div \frac{1}{10^{24}} = 10^6 \times 10^{24} = 10^{29}$$

۳- عددهای $۱۶^۲$ و $۸^۴$ و $۲^{۱۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$۸^۴ = (۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲}$$

$$۱۶^۳ = (۲^۴)^۳ = ۲^{۱۲}$$

$$۲^{۱۱} < ۸^۴ = ۱۶^۳$$

۴- در جاهای خالی علامت $<$ ، $>$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $۳^{-۱} \bigcirc ۳^{-۲}$

ب) $۲^۰ \bigcirc ۲^{-۵}$

ج) $(۰/۵)^{-۲} \bigcirc (۰/۶)^{-۲}$

$$\frac{1}{۳} > \frac{1}{۹}$$

$$۱ > \frac{1}{۲۵}$$

$$۴ > \frac{۱۰۰}{۳۶} = \frac{۲۵}{۹}$$

د) $۵^{-۱} \bigcirc ۰$

ه) $\left(\frac{-۸}{۱۵}\right)^۰ \bigcirc ۱$

و) $-۵^{-۲} \bigcirc (-۵)^{-۲}$
 $- \quad +$

$$\frac{1}{۵} > ۰$$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $۵^x \times ۵^{-۲} = ۵^۴$

ب) $۵^x \div ۵^{-۲} = ۵^۴$

$۵^{x-۲} = ۵^۴$

$۵^{x-(-۲)} = ۵^۴$

$x-۳ = ۴$

$x+۳ = ۴$

$x=۷$

$x=۱$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^۴ \times a^۵ = a^۲۰$

✓ ه) $(-۳)^۰ + (۳^{-۱})^{-۱} = ۴$

✓ ب) $a^۴ \times a^۵ = a^۹$

× و) $۳^{-۱} \times ۴^{-۱} = ۱۲^{-۲}$

✓ ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > ۰$

× ز) $۶^{-۲} = -\frac{۲}{۶}$

× د) $۳^{-۲} = -۹$

✓ ح) $۳^{-۱} < ۳^{-۱}$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $\left(\frac{1}{۳}\right)^{-۱۰} \times ۲۷^{-۳}$

ب) $(۰/۲)^{-۴} \times ۲۵^{-۲}$

$$= ۳^{۱۰} \times (۳^۳)^{-۲} = ۳^{۱۰} \times ۳^{-۹} = ۳$$

$$= \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{-۴} \times (۵^۲)^{-۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ \times ۵^{-۴} \\ = ۵^۴ \times ۵^{-۴} = ۵^۰ = ۱$$

$$\begin{aligned} \text{د) } (-5^{-2})^{-1} &= \left(-\frac{1}{5^2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{25}\right)^{-1} \\ \text{ج) } \left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4 &= \left(\frac{14}{15}\right)^4 \times \left(\frac{45}{28}\right)^4 = \left(\frac{14}{15} \times \frac{45}{28}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = -25 \end{aligned}$$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$2^{-3} \text{ و } 5^{-3} \text{ و } 2^3 \text{ و } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \text{ و } (-7)^2 \text{ و } (-1)^{21} \text{ و } 1^{-90} \text{ و } -2^{-4}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{125} \quad 8 \quad +4 \quad 49 \quad -1 \quad 1 \quad -\frac{1}{16}$$

$$(-1)^{21} \text{ و } -2^{-4} \text{ و } 5^{-3} \text{ و } 2^{-3} \text{ و } 1^{-90} \text{ و } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \text{ و } 2^3 \text{ و } (-7)^2$$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} (0/987)^{10} &< 1^0 & (1/2)^9 &< (1/0.2)^9 & \left(\frac{5}{4}\right)^2 &< (0/7)^2 & \left(\frac{3}{4}\right)^2 &> (0/75)^2 \\ \checkmark & & \times & & \times & & \checkmark \end{aligned}$$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}} & \quad \text{ب) } \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3}{-2^{-3}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{-2^{-3}} = \frac{\frac{1}{64}}{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{8}$$

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\begin{aligned} \text{الف) } \frac{3^{-5} \times 1^0 \times 2^5}{4^{-5} \times 15^{-5}} & \quad \text{ب) } \frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8} \times 2^4}{2^{-4} \times \frac{1}{8}} = 2^4 \times 2^4 = 2^8 \end{aligned}$$

$$= \frac{3^{-5} \times 5^2}{6^{-5}} = \frac{5^2}{3^{-5}} = 5^2 \times 3^5$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\times 1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$\checkmark 5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$\checkmark 4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$\times 7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$\checkmark 6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$\checkmark 8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً ۶۹۵۰۰۰ کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$$6950000 = 6.95 \times 10^6$$

۴- اندازه یک باکتری ۰/۰۰۰۰۰۰۵ متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$$5 \times 10^{-7}$$

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

$$\frac{1/4 \times 10^9}{1/3 \times 10^7} \approx \frac{10^9}{10^7} = 100 \quad \text{تقریباً } 100 \text{ برابر}$$

$1/4$ را تقریباً با $1/3$ برابر گرفته‌ایم.

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9 = 8 \times 10^2$$

$$\begin{aligned} \frac{12/5 \times 10^{-2}}{25 \times 10^{-19}} &= 0.5 \times 10^{-2} \times 10^{19} \\ &= 0.5 \times 10^{15} \\ &= 5 \times 10^{14} \end{aligned}$$

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟ مریخ

$$6/287 \times 10^8$$

$$9/17 \times 10^7$$

$$62/87 \times 10^7$$

>

$$9/17 \times 10^7$$

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^{\bigcirc} > 0.02$$

$$0.03 > 0.003 \times 10^{\bigcirc}$$

$$-2, -1, 0, 1, \dots$$

$$0, -1, -2, \dots$$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^{-6}, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

$$5/35 \times 10^{-3} < 1/5 \times 10^{-2} < 3/7 \times 10^{-2} < 1/2 \times 10^{-6}$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

$$-\frac{7}{4}, +\frac{7}{4}, -\frac{1}{9}, +\frac{1}{9}, -\sqrt{15}, +\sqrt{15}, -12, +12, -\sqrt{12}, +\sqrt{12}, -\sqrt{18}, +\sqrt{18}$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

$$6, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{-5}, -\frac{1}{6}, \sqrt[3]{10}$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\begin{array}{l} \times \sqrt{(-1)^2} = -1 \quad \checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1 \quad \checkmark \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5 \quad \checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \\ \checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16} \quad \checkmark \sqrt{1/44} = 1/2 \quad \times (\sqrt{-1})^2 = 1 \quad \checkmark \sqrt[3]{-64} = -4 \end{array}$$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{125} \times \sqrt{36} & \sqrt{-1} \times \sqrt{81} & \sqrt{\frac{81}{3}} \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & 30 & -9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \sqrt{-25} \times \sqrt{5} \\ \updownarrow \\ -5 \end{array}$$

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد :

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 = \sqrt[3]{8} \rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8}$$

پس $a < 8$

۷, ۶, ۵ ...

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

در صورتی که $|x| = x$ است که x عددی نامنفی باشد.

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{(-0)^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$x = -9 \Rightarrow \sqrt{-(-9)^2} = \sqrt{9^2} = 9 \neq -9$$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

مساحت یک وجه $16a^2$ و $96a^2 \div 6 = 16a^2$

حجم $(4a)^3 = 64a^3$

$$\sqrt{16a^2} = 4a \text{ ضلع}$$

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) = x + y$$

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید : $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

$$\sqrt{15^0} = \sqrt{3 \times 2 \times 5^2} = 5\sqrt{6} \quad \sqrt{24} = \sqrt{3 \times 2^3} = \sqrt{3 \times 2 \times 2^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{8^0} = \sqrt{2^3 \times 5} = 4\sqrt{5} \quad \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟ بله

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-2})$$

$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1)^3 \times 4^3} = -1\sqrt[3]{4}$$

$$= \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

۱۱- حاصل را به دست آورید :

$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$	$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$
$6\sqrt[3]{64} = 6\sqrt[3]{4^3}$	$= \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$	$\sqrt[3]{\frac{18 \times 60}{5}}$
$= 6 \times 4 = 24$		$= \sqrt[3]{216} = 6$

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ $= 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$ $= 26\sqrt{2}$	ج) $\sqrt[3]{27^2}$ $= \sqrt[3]{(3^3)^2}$ $= \sqrt[3]{(3^2)^3} = 9$	هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$ $= \sqrt{20} + 2 - \sqrt{50} - \sqrt{10}$ $= 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$
ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ $= 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$	د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$ $= \sqrt[3]{\frac{-3^3}{4^3}} = \frac{-3}{4}$	و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$ $= 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

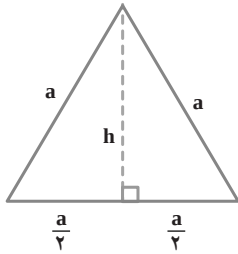
$$2\sqrt{x^2} - x$$

$$= 2|x| - x = 2(-x) - x = -2x - x = -3x$$

۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتی متر را به دست آورید.

$$\text{محیط} = 4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\text{مساحت} = (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$$



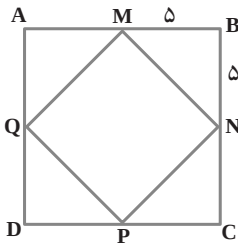
۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازه ارتفاع h را برحسب a به دست آورید؛ سپس مساحت آن را برحسب a بنویسید.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$ هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 مترمربع باشد، محیط مربع $MNPQ$ چقدر است؟

$$\sqrt{100} = 10$$

$$MN^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

$$MN = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \text{محیط} = 4 \times 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

۶- در جاهای خالی علامت $<$ یا $=$ یا $>$ بگذارید:

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$2 + \sqrt{5} \quad 3$$

$$\sqrt{16} \quad \sqrt{13}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \ominus \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \ominus 5$$

$$\sqrt{25}$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

$$\sqrt{\boxed{100}} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\boxed{9}} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\frac{\boxed{1}}{9}} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt{\boxed{8}} = 2$$

$$\text{هـ)} \frac{2^{-5}}{2(-8)} = \sqrt{64} \quad \text{و)} \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^{(-1)} \quad \text{ز)} \frac{m^6 \times m^{-2}}{m(3)} = m \quad \text{ح)} 9\sqrt{-27} = \frac{(12)^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \frac{5\sqrt{3}}{2} & \text{ب)} \quad \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} &= \frac{2\sqrt[3]{a}}{a} \\ \text{ج)} \quad \frac{2}{\sqrt{v}} \times \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}} &= \frac{2\sqrt{v}}{v} \end{aligned}$$

۹- آیا تساوی $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

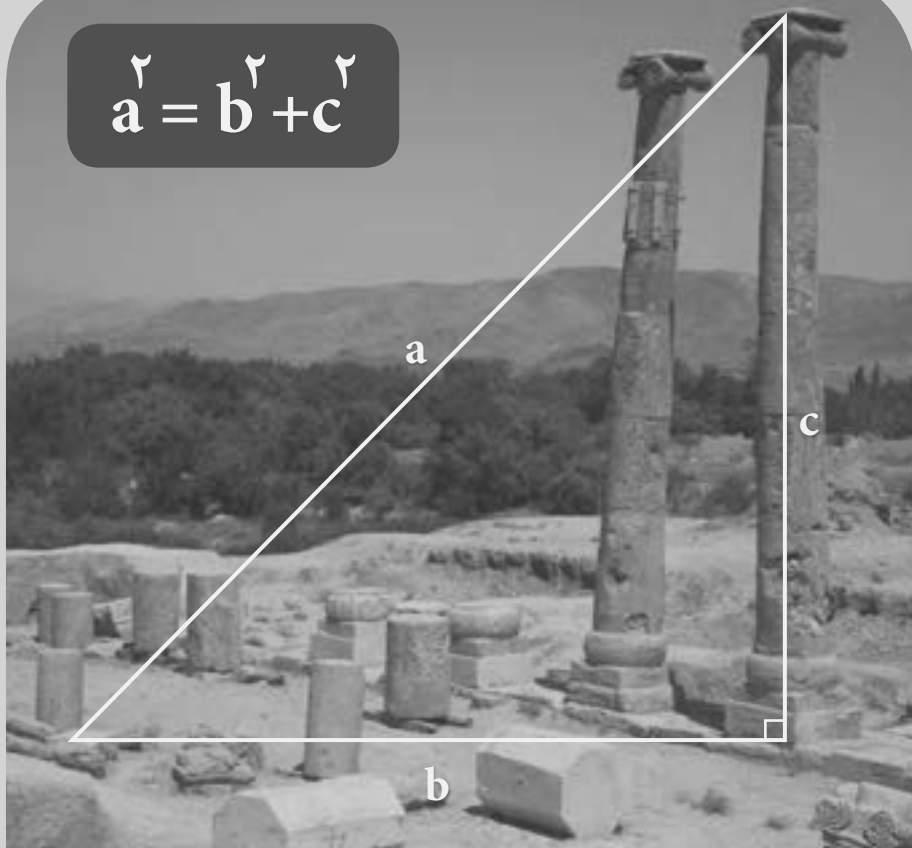
الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$ ، تساوی درست است.

چون اگر x عددی منفی باشد عدد زیر رادیکال درست است منفی شده و اعداد منفی جذر ندارند.



عبارت‌های جبری

$$a^2 = b^2 + c^2$$



اثر باستانی «سیونیا» — استان مرکزی

عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند، به طور مثال رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

نگاه کلی به فصل

درس اول: یادآوری و تکمیل مطالب مربوط به یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها است. در این قسمت عبارت‌هایی که یک جمله‌ای محسوب نمی‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند در ادامه یک جمله‌ای‌های متشابه، درجه یک جمله‌ای، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه و چندجمله‌ای‌ها تعریف دقیق شده و مثال‌هایی آورده شده است.

همچنین به معرفی اتحاد پرداخته و تفاوت بین اتحاد و معادله را با انجام یک فعالیت بررسی خواهیم کرد. سپس اتحاد مربع دوجمله‌ای و مفهوم تجزیه و تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادها در این درس آمده است.

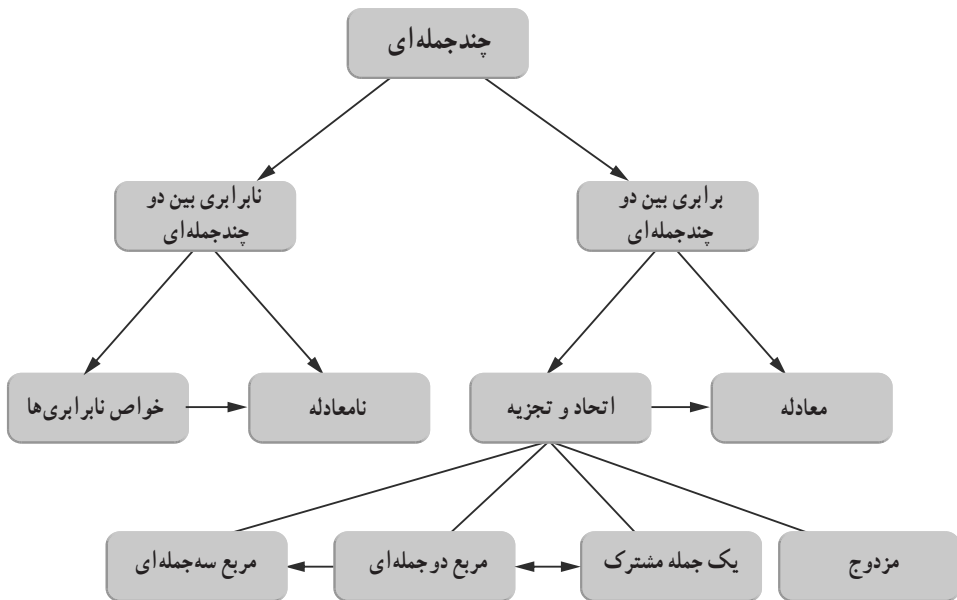
درس دوم: در ادامه درس اول اتحاد مربع سه جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک آمده است. نکته مهمی که باید به آن توجه داشت، این است که در اثبات اتحادها از استدلال جبری و تعبیر هندسی استفاده شده است و دانش‌آموز باید بتواند اتحادهای جبری را به صورت یک عبارت کلامی بیان کند. در ادامه تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک با انجام چند فعالیت بررسی شده و اتحاد مربع دوجمله‌ای به عنوان حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک آمده است.

درس سوم: مفهوم نابرابری و تعریف آن بیان می‌شود. باید توجه داشت که این تعریف یک رابطه دوسویه است و از هر دو طرف آن استفاده می‌شود.

$$a > b \Leftrightarrow \neg (a \leq b) \quad a = b + p$$

پس مفهوم « $\geq$ » و نامساوی مضاعف مطرح شده است. در ادامه خواص نابرابرها با استفاده از یک فعالیت به صورت استدلال استقرایی مطرح شده است. می‌توان خواص نابرابری‌ها را به کمک تعریف آن اثبات کرد که در قسمت دانستنی برای معلم، خواهیم آورد.

در قسمت آخر مفهوم نامعادله یک مجهولی درجه اول و روش حل آن با استفاده از خواص نابرابرها آمده است و مجموعه جواب نامعادله با بررسی چند مثال خاتمه بخش این فصل است.



دانستنی‌هایی برای معلم

۱- کوتاه‌شدهٔ تاریخ جبر و نمادهای حرفی^۱: جبر به عنوان دانش حلّ معادله‌ها پدید آمد. در مصر و بابل کهن و همچنین در دوران‌های جدیدتر در هند، با مقدمه‌های جبر آشنا بودند و با توجه به داده‌های مسأله، می‌توانستند معادله را تشکیل دهند و برخی از گونه‌های آن را حل کنند. البته آنها از حرف برای نشان دادن داده‌ها و مجهول‌ها آگاهی نداشتند و نمی‌توانستند معادله‌ها را به صورت کلی خود تنظیم کنند. در دوران ریاضیات کاربردی، عنصرهای جبری، همچون ادامهٔ دانش حساب تلقی می‌شد. با وجود این، به ویژه بابلی‌ها تا مرز بالایی از جبر جلو رفته بودند و می‌توانستند مسأله‌های عملی را که منجر به گونه‌هایی از معادلهٔ درجهٔ دوم و در بعضی حالت‌ها، حتی درجهٔ سوم شود، حل کنند. به واژهٔ «جبر» برای نخستین بار در سدهٔ نهم میلادی و در کارهای محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی، برخورد می‌کنیم. خوارزمی کتاب «حساب جبر و مقابله» را به تشکیل و حلّ معادله‌ها اختصاص داده است. او از شش نوع معادله صحبت می‌کند که یکی از آنها، معادلهٔ درجهٔ اول و پنج گونهٔ دیگر درجهٔ دوم است (درواقع، معادلهٔ درجهٔ اول را هم حالت خاصی از معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی

۱- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

که ضریب درجه دوم برابر صفر باشد، می گیرد). «حساب جبر و مقابله» همه چیز را با واژه‌ها بیان می کند و هیچ گونه نماد حرفی ندارد.

اصطلاح‌های «جبر» به معنای «جبران کردن»، و «مقابله» (مقابل هم قراردادن)، معرّف دو عمل ساده جبری است؛ به نحوی که همه جمله‌های سمت چپ و راست معادله، مثبت یا با ضریب مثبت باشند. واژه «جبر» به همان معنایی آمده است که در این مصراع سعدی: «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند» و از نظر عمل‌های جبری، به معنای انتقال جمله منفی به طرف دیگر معادله است تا مثبت شود. اصطلاح «مقابله» هم به معنای مقابل قراردادن جمله‌ها در دو طرف برابری و حذف مقادارهای برابر از دو طرف است.

به این ترتیب «جبر و مقابله» به معنای ساده کردن معادله و ساده کردن جمله‌های متشابه است. نمادهای امروزی به تدریج و در طول زمان به وجود آمد.

«محمد کرجی» ریاضیدان ایرانی اول سده یازدهم میلادی، برای نشان دادن مجهول، نمادی را انتخاب کرد. معادله‌ها نزد ایرانی‌ها تا جایی رسید که «خیام» معادله‌های درجه سوم را به باری برش‌های مخروطی حل می کند. باید توجه داشت که ایرانیان به پیروی از یونانی‌ها، از هندسه برای حل مسأله‌های جبری کمک می گرفتند. خوارزمی مسأله‌های خود را گاهی با شیوه جبری و گاهی با کمک هندسه حل می کند. ولی خیام برای حل معادله‌های درجه سوم، تنها از هندسه و برش‌های مخروطی استفاده می کند تا سرانجام جمشید کاشانی راه حلی جبری برای معادله درجه سوم می یابد که جواب را تا هر درجه دقت به دست می دهد.

۲- یک جمله‌ای صفر و درجه آن: یک نوع ساده از عبارت‌های جبری، چندجمله‌ای‌ها هستند. در این جا چندجمله‌ای با یک متغیر را بحث خواهیم کرد.

هر چندجمله‌ای یک متغیره، به صورت یک عبارت جبری روی یک متغیر است که در آن فقط از جمع و ضرب روی آن متغیر و اعداد استفاده شده است، مانند:

$$2x^3 + 5x^2 + 4 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{5}x + 7x^2 - 3x^5 - \sqrt{2}$$

چنانچه یک عبارت جبری فقط از ضرب اعداد در آن متغیر حاصل شود، به آن یک جمله گفته می شود، هر یک جمله‌ای بر حسب متغیر x را پس از ساده کردن به صورت ax^n نمایش می دهند که در آن $n \in \mathbb{W}$ ، $a \in \mathbb{R}$ درجه یک جمله‌ای و x متغیر آن یک جمله‌ای است، واضح است که:

$$ax^n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & n = 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

در نتیجه هر عدد حقیقی $a \in \mathbb{R}$ یک جمله‌ای بر حسب متغیر x و از درجه صفر است. عدد 0 نیز یک جمله‌ای محسوب می‌شود و برای آن درجه تعریف نمی‌کنیم. این گونه محدودیت‌ها در تعاریف را قبلاً دیده‌اید، برای مثال وقتی مفهوم عمل تقسیم تعریف می‌شود، در آن همواره مقسوم علیه را مخالف با صفر در نظر می‌گیریم و عمل تقسیم بر صفر را تعریف نشده تلقی می‌کنیم.

اگر اصرار داشته باشیم که برای یک جمله‌ای صفر درجه تعریف کنیم، باید این جمله را چنان در نظر بگیریم که در بیان کردن قضیه‌ها ثمری داشته باشد و به ویژگی مهمی اشاره کند. دو قضیه زیر را در چند جمله‌ای‌ها در نظر بگیرید.

قضیه ۱: درجه حاصل ضرب دو چند جمله‌ای برابر با مجموع درجه‌های آن دو چند جمله‌ای است.

قضیه ۲: درجه حاصل جمع دو چند جمله‌ای کوچک‌تر یا مساوی ماکزیمم درجه آن دو چند جمله‌ای است.

اکنون اگر در قضیه ۱، $A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $B = 0$ قرار دهید، در این صورت مثال نقضی برای درستی این قضیه به دست آورده‌ایم.

برای اینکه از این تنگنا عبور کنیم، دو پیشنهاد مطرح می‌شود.

پیشنهاد اول: در قضیه‌های ۱ و ۲، دو چند جمله‌ای را ناصفر در نظر بگیریم.

پیشنهاد دوم: صورت قضیه را تغییر ندهیم ولی برای یک جمله‌ای صفر، درجه تعریف کنیم. در این حالت اگر درجه یک جمله‌ای صفر را $-\infty$ تعریف کنیم، روشن است که معنای قابل قبولی در قضیه‌های ۱ و ۲ خواهد داشت. برای مثال فرض کنید A یک جمله‌ای بر حسب متغیر x و از درجه n و B چند جمله‌ای صفر و از درجه $-\infty$ باشد، در این صورت $A \times B = 0$ و درجه حاصل ضرب $A \times B$ برابر با $-\infty$ است. از آنجا که $n + (-\infty) = -\infty$ پس درستی قضیه ۱ برقرار خواهد بود.

مسیرهایی برای توسعه

تعریف پیشرفته از چند جمله‌ای‌ها: عملاً، هر چند جمله‌ای که به شکل استاندارد خود نوشته شده باشد، با دنباله ضرایب خود به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، هر چند جمله‌ای را می‌توان متناظر یک دنباله از اعداد در نظر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر است.

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

در سطوح پیشرفته‌تر، برای تعریف چند جمله‌ای‌ها فقط همین دنباله ضرایب را در نظر می‌گیرند و هر دنباله از اعداد حقیقی که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر باشد را به عنوان یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی معرفی می‌کنند. روشن است که در این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، کسی چند جمله‌ای‌ها را به عنوان تابع در نظر نخواهد گرفت. البته این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، مناسب مدرسه نیست و در اینجا فقط برای روشن شدن مفاهیم، صرفاً برای معلمین این روش آورده شده است. با این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، جمع و ضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

توجه داشته باشید که این دنباله‌ها با اندیس صفر شروع می‌شوند. چند جمله‌ای‌هایی که اندیس ۱ به بعد آنها صفر است و فقط اندیس صفر آنها احياناً ناصفر است با یک عدد حقیقی مشخص می‌شوند و جمع و ضرب آنها همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی،

$$(a_0, 0, 0, \dots) + (b_0, 0, 0, \dots) = (a_0 + b_0, 0, 0, \dots)$$

$$(a_0, 0, 0, \dots) \cdot (b_0, 0, 0, \dots) = (a_0 b_0, 0, 0, \dots)$$

به همین خاطر به خود حق می‌دهیم، این چند جمله‌ای‌ها را با همان ضریب اندیس صفرشان نشان دهیم و اعداد حقیقی را به عنوان زیرمجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌ها در نظر بگیریم. پس عدد a به عنوان یک چند جمله‌ای همان دنباله $(a, 0, 0, \dots)$ است. با توجه به تعریف جمع و ضرب چند جمله‌ای‌ها، جمع و ضرب یک عدد با چند جمله‌ای‌ها به شکل زیر خواهد بود.

$$a + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a + b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

$$a (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (ab_0, ab_1, \dots, ab_n, \dots)$$

چند جمله‌ای $(0, 1, 0, 0, \dots)$ نقش ویژه‌ای بازی می‌کند و برای آن یک اسم خاص انتخاب می‌کنیم و مثلاً آن را با $\times$ نشان می‌دهیم. ضرب یک چند جمله‌ای در $\times$ موجب می‌شود ضرایب آن چند جمله‌ای، یک واحد به جلو حرکت کند، یعنی

$$\times (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (0, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

به ویژه ضرب $\times$ در خودش به شکل زیر خواهد بود.

$$\times^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\times^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$



با این علامت گذاری ها و قراردادها، هر چند جمله ای $(a_0, a_1, \dots, a_n, \circ, \circ, \dots)$ را می توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \circ, \circ, \dots) = a_0(1, \circ, \circ, \dots) + a_1(\circ, 1, \circ, \circ, \dots) + \dots + a_n(\circ, \circ, \dots, 1, \circ, \circ, \dots) \\ = a_0 + a_1 \chi + \dots + a_n \chi^n$$

به این ترتیب به همان شکل مرسوم چند جمله ای ها می رسمیم، ولی یک تفاوت اساسی وجود دارد که در اینجا χ یک متغیر عددی نیست و یک چند جمله ای خاص است، در واقع $(\circ, 1, \circ, \circ, \dots) = \chi$ مجموعه چند جمله ای ها، مجموعه مشخصی از اشیاء معین است که بین آنها عملیات جمع و ضرب تعریف شده است و تمام خواص مهم اعمال جمع و ضرب برقرار است، غیر از اینکه چند جمله ای ها عموماً وارون پذیر نیستند. در واقع تنها چند جمله ای های وارون پذیر، اعداد ناصفرند.

چند جمله ای ها و توابع چند جمله ای: در هر چند جمله ای، اگر چند جمله ای خاص χ را به متغیر عددی x تبدیل کنیم، یک چند جمله ای معمولی به دست می آوریم که در مدرسه مطرح می شود و می توانیم آن را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم. این گونه توابع را توابع چند جمله ای می نامند. توجه کنید که چند جمله ای و تابع چند جمله ای دو مفهوم متفاوتند، اگرچه تشخیص این تفاوت در سطح مدرسه آسان نیست. البته برای دانش آموزان تشخیص این تفاوت ساده تر است، زیرا دانش آموزان هنوز مفهوم تابع را نمی شناسند تا مشکلی برای تفکیک کردن داشته باشند. بیشترین مشکل برای خود معلمین است که هر دو مفهوم را می شناسند و باید بتوانند این دو مفهوم را برای خود از هم تفکیک کنند. چند جمله ای به عنوان تابع در ذهن معلمین قوی تر است، ولی معلمین باید بتوانند به چند جمله ای در شکل استاندارد آن نگاه کنند و آن را صرفاً به عنوان یک عبارت جبری یا دنباله ضرایب در نظر بگیرند. با این تفکیک دو مفهوم چند جمله ای و تابع چند جمله ای از هم جدا خواهند شد.

البته با وجود تفاوت مفهومی بین چند جمله ای ها و توابع چند جمله ای، بین آنها یک تناظر یک به یک برقرار است و هر چند جمله ای یک تابع چند جمله ای مشخص می کند و برعکس و دو چند جمله ای مساویند اگر و فقط اگر توابع چند جمله ای وابسته به آنها مساوی باشند. همچنین اعمال جمع و ضرب چند جمله ای ها متناظر اعمال جمع و ضرب توابع چند جمله ای می باشد. به همین خاطر است که تفکیک این دو مفهوم مشکل شده است.

درجه چند جمله ای ها: به طور شهودی، بزرگ ترین توانی از χ که در یک چند جمله ای رخ می دهد را درجه آن چند جمله ای می نامند. در چند جمله ای هایی که حداقل یک جمله ناصفر دارند

این مفهوم بدون ابهام است ولی برای چندجمله‌ای صفر که همه جملات آن به صورت x^n ، 0 است نمی‌توان بزرگ‌ترین n را تعیین کرد. بنابراین مفهوم درجه، فقط برای آن چندجمله‌ای‌هایی قابل تعریف است که حداقل یکی از ضرایب آنها ناصفر باشد. به‌طور دقیق‌تر درجه یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ برابر است با بزرگ‌ترین اندیس k که $a_k \neq 0$. روشن است که این تعریف فقط برای چندجمله‌ای‌های ناصفر اعتبار دارد و برای چندجمله‌ای صفر، درجه، تعریف نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

- جبر و مقابله / محمد بن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیو جوم / انتشارات اطلاعات
- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه از سری کتاب‌های کوچک ریاضی
- عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی / انتشارات مدرسه
- همانی عبارت‌های جبری و کاربردهای آن / عبدالحسین مصحفی / انتشارات مدرسه
- نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میر شهرام صدر / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(\frac{1}{4}x^2y)^3$

ب) $(-3a^2b)(2ab^2)^2$

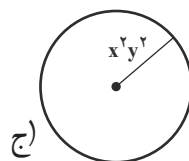
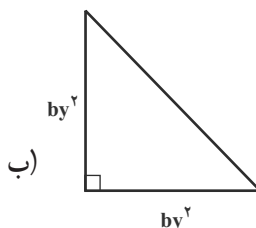
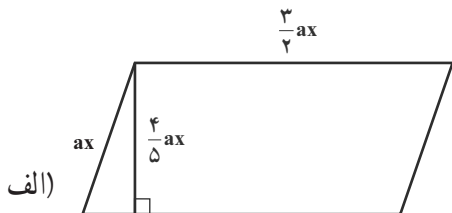
ج) $(-\frac{3}{4}a^2bc^3)^2(\frac{2}{3}ab^2c)$

د) $(-\frac{5}{7}a^2bxy^2)(-\frac{3}{5}ax^2y)$

هـ) $(\frac{3}{4}a^2bxy)^2(-\frac{4}{3}a^5b^2y^3)^3$

و) $(-\frac{2}{5}ab^5)(\frac{25}{4}a^5b) + 3(a^2b^2)^3$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- درجه عبارت‌های زیر را نسبت به x ، نسبت به y و نسبت به x و y تعیین کنید. سپس هریک از عبارت‌های زیر را یک‌بار برحسب توان‌های نزولی x و یک‌بار برحسب توان‌های نزولی y مرتب کنید.

الف) $-3x^2y + 4bx^2y^2 - 9xy^2 + 5$

ب) $x^6 + x^5y - x^2y^4 + 2x^2y^2 - x^4y^2 + x + 1$

ج) $x^{k+1}y^k - 3y^{k+1}x^{k-2} - 3y^{k+2} + 5$

د) $\frac{7}{3}x^3y - \frac{1}{2}xy^3 + \frac{1}{6}x^2y^2$

۴- اگر $A(x) = -x^2 - 1$ ، $B(x) = -3x^2 + 1 - 2x$ و $C(x) = 4x^2 + 6x - 7$ حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید و سپس چند جمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x) + B(x) - 2C(x)$

ب) $\frac{1}{2}A(x) + B(x) - 3C(x)$

ج) $2[A(x) - B(x)] + 3C(x)$

د) $2B(x) - A(x) \cdot C(x)$

۵- اگر $A(x) = (x^m - 1)^2$ و $B(x) = x^m - x^{2m} - 1$ و $C(x) = x^{m+1}$ حاصل عبارت‌های زیر را تعیین کنید، سپس چند جمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x) + \frac{B(x)}{2} - 3C(x)$

ب) $A(x) + B(x) - 2C(x)$

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(x^2 + \frac{7}{5}x^3 - \frac{1}{4})(x^2 - \frac{7}{5}x^3 + \frac{1}{4})$

ب) $(2x + \frac{y}{3})^2$

ج) $(-4 + xy)(xy + 5)$

$$د) (x+y-2z)^2$$

$$هـ) (a^2-b)(b+a^2)$$

$$و) \left(\frac{2}{3}x^2y + \frac{3}{4}z^2\right)^2$$

$$ز) (x^2-5xy-3x^2)(x^2-3x+5y)$$

$$ح) (4x-y^2)^2$$

$$ط) (a+2b+c-3)(a+3-2b+c)$$

$$ی) \left(3\frac{1}{4}k^2 - \frac{12}{5}L^5\right)^2$$

$$ک) (7x^4y^2+3x^5y^3)^2$$

$$ل) (a+5)(a-3)(a^2-2a+15)$$

$$م) (x^{k+2}+y^{k+2})(x^{k+2}-y^{k+2})$$

$$ن) \left(2a - \sqrt{3b} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$ق) (a^mb^n-c^md^n)(a^mb^n+c^md^n)$$

$$ر) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$ش) [(2x-y)(2x+y)]^2$$

$$ت) (2x^m-1)(2x^m+1)(4x^{2m}+1)$$

$$ث) (x^2+x+1)(x^2+x-2)(x^2+2x^2+x+2)$$

$$خ) \left(\frac{3}{a} + \frac{a}{3}\right)\left(\frac{3}{a} - \frac{a}{3}\right)$$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$الف) 256^3 - 250^3 - 6^3$$

$$ب) 10001^2$$

$$ج) 75^2 - 275^2$$

$$د) 423 \times 437$$

$$هـ) 440^2 - 430^2 - 10^2$$

$$و) 102^2 - 2^2$$

۸- به جای نقطه چین ها، عبارت مناسب بنویسید.

الف) $(2x - \dots)^2 = \dots - 12x + \dots$

ب) $(\dots + \dots)^2 = a^2 + 12ab^2 + \dots$

ج) $(\dots - 7y)(x^2 + \dots) = (\dots)^2 - 49y^2$

د) $(\dots + \dots)^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{16} + \dots$

چند مسئله کاربردی نامعادله یک مجهولی درجه اول

۹- زمین شناسی: در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین شناس روسیه

به این نتیجه رسیدند، که درجه حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین از رابطه زیر به دست می آید:

$$T = 25(x - 3) + 30 \quad (3 \leq x \leq 15)$$

که در این رابطه، T درجه حرارت برحسب درجه سانتی گراد است. مشخص کنید در چه محدوده ای از عمق زمین، درجه حرارت بین 200°C تا 300°C تغییر می کند.

حل:

$$T = 200 \Rightarrow 200 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 9/8$$

$$T = 300 \Rightarrow 300 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 13/8$$

در نتیجه $9/8 \leq x \leq 13/8$ ، یعنی در عمق $9/8$ تا $13/8$ کیلومتری زیر سطح زمین، درجه حرارت بین 200°C تا 300°C تغییر می کند.

۱۰- هوا شناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالا می رود، منبسط می شود و

تقریباً بعد از 4000 پا. برای هر 1000 پا؛ $5/5$ فارنهایت از درجه هوا کم می شود. اگر درجه حرارت در اطراف سطح زمین 70°F باشد، آنگاه درجه حرارت (T) در ارتفاع h از سطح زمین از رابطه $T = 70 - 0.0055h$ به دست می آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجه حرارت هوا از 40°F تا 26°F تغییر می کند، به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} -40 \leq T \leq 26 \\ \Rightarrow -40 \leq 70 - 0.0055h \leq 26 \\ T = 70 - 0.0055h \end{cases}$$

$$\Rightarrow -40 - 70 \leq -0.0055h \leq 26 - 70 \Rightarrow -110 \leq -0.0055h \leq -44$$

$$\Rightarrow \frac{110}{0.0055} \geq h \geq \frac{44}{0.0055} \Rightarrow 20000 \geq h \geq 8000$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین $4^{\circ}F$ تا $26^{\circ}F$ تغییر می‌کند.

۱۱- روان‌شناسی: آی کیوی (IQ) افراد مختلف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

که در آن MA سنّ هوشی و CA سنّ تقویمی افراد است. در صورتی که $80 \leq IQ \leq 140$: برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سنّ هوشی را به دست آورید.

$$\left\{ \begin{array}{l} 80 \leq IQ \leq 140 \\ IQ = \frac{MA}{CA} \times 100 \Rightarrow 80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140 \Rightarrow \frac{12}{100} \times 80 \leq MA \leq \frac{12}{100} \times 140 \\ CA = 12 \end{array} \right. \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow 9.6 \leq MA \leq 16.8$$

در نتیجه سنّ هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

۱۲- تجارت و اقتصاد: در یک تجارت سودآور واضح است، که باید سود (R) بیشتر از هزینه (C) باشد؛ یعنی $R > C$. اگر معادله هزینه یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به صورت $C = 300 + 1/5x$ و معادله سود شرکت در یک هفته به صورت $R = 2x$ باشد، که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته شده در یک هفته است؛ در این صورت این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد، تا اینکه فعالیت تولیدی آن در واقع سودآور باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} R > C \\ C = 300 + 1/5x \Rightarrow 2x > 300 + 1/5x \Rightarrow x > 600 \\ R = 2x \end{array} \right. \quad \text{حل:}$$

در نتیجه برای اینکه فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیشتر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

۱۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید:

$$\text{الف) } 3 - 2x \geq 5(3 - 2x) \quad \text{ب) } 2(x - 3) + 5 < 5 - x$$

$$\text{ج) } \frac{7m}{-3} + 1 \leq -2 \quad \text{د) } -7n \geq 21$$

$$\frac{y-3}{4}-1 > \frac{y}{2} \text{ (و)}$$

$$\frac{p}{3}-\frac{p-2}{2} \leq \frac{p}{4}-4 \text{ (ح)}$$

$$-4 \leq \frac{9}{5}x + 32 \leq 68 \text{ (غ)}$$

$$15 \leq 7 - \frac{2}{5}x \leq 21 \text{ (ج)}$$

$$-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \text{ (هـ)}$$

$$2 \leq 3m - 7 < 14 + 2m \text{ (ز)}$$

$$\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}(x-3) \leq \frac{2x}{3} - \frac{3}{10}(x+2) \text{ (ط)}$$

$$-6 \leq -\frac{2}{3}(1-x) \leq 4 \text{ (ك)}$$

اهداف

- یک جمله‌ای را تشخیص دهد و مفهوم ضریب عددی و قسمت حرفی را درک کند.
- مفهوم چندجمله‌ای را درک کند و بتواند چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی متغیر مرتب کند.
- مفهوم اتحاد را درک کند و فرق اتحاد با معادله را بداند
- اتحاد مربع دوجمله‌ای را به صورت عبارت کلامی بیان کند و درستی آن را از روش جبری و هندسی درک کند.
- مفهوم تجزیه را بداند.
- در صورت امکان با استفاده از ب.م.م چندجمله‌ای را تجزیه کند و به تجزیه سه جمله‌ای‌ها به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای مسلط شود.

روش تدریس

هدف فعالیت صفحه ۷۹ ارائه مفهوم یک جمله‌ای است، با انجام این فعالیت دانش آموزان باید بتوانند یک جمله‌ای‌ها را تشخیص دهند. سپس ضریب عددی و عبارت حرفی آنها را مشخص کنند. $2\sqrt{x}$ و $3\sqrt{y}$ یک جمله‌ای نیستند زیرا از حاصل ضرب متغیرها با توان‌های صحیح و منفی در اعداد به دست نیامده‌اند.

$\frac{1}{x}$ و $|x|$ یک جمله‌ای نیستند، زیرا به طور صریح از حاصل ضرب اعداد در متغیرها با توان‌های صحیح و نامنفی به دست نیامده‌اند.

$2x^2 + x + 1$ یک جمله‌ای نیستند، زیرا در آنها از عمل جمع استفاده کردیم، درحالی که در یک جمله‌ای‌ها فقط از عمل ضرب (با توجه به تعریف) استفاده می‌کنیم.

3^x یک جمله‌ای نیست، زیرا از ضرب اعداد در متغیرها (با توجه به تعریف) به دست نمی‌آید. در ادامه این فعالیت می‌خواهیم، عملیات روی یک جمله‌ای‌ها را یادآوری و تکمیل کنیم. در قسمت ۲ فعالیت صفحه ۸۰، درجه یک جمله‌ای را نسبت به یک یا دو متغیر با استفاده از تکمیل جدول آموزش می‌دهیم، سپس چندجمله‌ای و درجه چندجمله‌ای را نسبت به یک یا چند متغیر آورده‌ایم. در قسمت ۳ فعالیت، از دانش آموزان می‌خواهیم که چندجمله‌ای‌ها را نسبت به توان‌های

نزولی متغیر مرتب کنند و نتیجه این فعالیت آن است که «دو چندجمله‌ای وقتی با هم برابرند که صورت استاندارد آنها (یعنی برحسب توان‌های نزولی متغیر) با هم یکسان باشند».

در کار در کلاس صفحه ۸۰ و ۸۱ می‌خواهیم عملیات روی چندجمله‌ای‌ها را با توجه به خاصیت توزیع پذیری یادآوری و تکمیل کنیم، سپس دانش‌آموزان چندجمله‌ای‌ها را ساده کنند. نتیجه این کار در کلاس این است که «چندجمله‌ای‌ها فقط از جمع جبری یک جمله‌ای‌ها پدید نمی‌آیند، بلکه در بعضی مواقع از حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها در یکدیگر نیز حاصل می‌شوند».

هدف از فعالیت صفحه ۸۱ ارائه مفهوم اتحاد است. با کامل کردن جدول ملاحظه می‌کنیم که مقادیر عددی دو ستون آخر با هم یکسان می‌شوند، سپس حاصل $(x+3)^2$ را با روش جبری به دست آورده و نتیجه می‌گیریم که حاصل آن x^2+6x+9 است و به همین دلیل؛ دو ستون آخر جدول مقادیر عددی یکسانی دارند. در قسمت ۲ و ۳ این فعالیت می‌خواهیم دانش‌آموزان با ضرب پرانتزها، اتحاد مربع دوجمله‌ای را درک کنند، سپس با مقایسه دو طرف برابری اتحاد بتوانند با یک عبارت کلامی، این اتحاد را بیان کنند. سپس درستی این اتحاد را با روش هندسی درک کنند. در حقیقت در بیان اتحادها از دیدگاه جبری، دیدگاه هندسی و بیان اتحاد به صورت کلامی استفاده شده است.

در قسمت ۴ این فعالیت می‌خواهیم حاصل مربع تفاضل دو جمله یعنی $(a-b)^2$ را پیدا کنیم و آن را با حاصل مربع مجموع دو جمله یعنی $(a+b)^2$ مقایسه کنیم و در نهایت آنها را با عبارت‌های کلامی مشابه هم بیان کنیم.

قسمت ۱ کار در کلاس صفحه ۸۳ می‌خواهد که با عبارت‌های کلامی به دست آمده برای اتحاد مربع دوجمله‌ای، حاصل عبارات داده شده را به دست آورید.

در قسمت ۲ این کار در کلاس می‌خواهیم که با درک عبارت کلامی متناظر با اتحاد مربع دوجمله‌ای جاهای خالی را پر کنند و این قسمت پیش‌زمینه ورود به تجزیه سه جمله‌ای‌هایی است که با این اتحاد تجزیه می‌شوند.

فعالیت صفحه ۸۳ ورود به تجزیه چندجمله‌ای‌هاست، در ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع را به صورت زیر بنویسیم. در این صورت دوجمله‌ای $ab+ac$ را تجزیه کرده‌ایم:

$$ab+ac=a(b+c)$$

در اینجا a را (ب.م.م) جملات چندجمله‌ای معرفی کرده و به این روش در صورت وجود (ب.م.م) بین جملات می‌توان چندجمله‌ای را تجزیه کرد.

هدف از کار در کلاس صفحه ۸۴ این است که سه جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه کنیم. ابتدا باید تشخیص دهیم، کدام سه جمله‌ای‌ها به کمک این اتحاد با ضرایب گویا تجزیه می‌شوند. با توجه به سه جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2$ در سه جمله‌ای‌هایی که دو جمله مربع کامل داشته باشند؛ اولی و دومی را تشخیص می‌دهیم. سپس اگر جمله دیگر، دو برابر حاصل ضرب اولی و دومی باشد، به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای آن را تجزیه می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر بین جملات (ب.م.م) موجود بود، ابتدا به کمک (ب.م.م) گیری تجزیه می‌کنیم. سپس از اتحاد مربع دوجمله‌ای برای ادامه تجزیه استفاده می‌کنیم، مانند:

$$\begin{aligned}
 18ab - 3a^2b - 27b &= 3b(6a - a^2 - 9) \\
 &= -3b(a^2 - 6a + 9) \\
 &= -3b(a-3)^2 = -3b(a-3)(a-3)
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۸۵

۲- چون دوزنقه FCDE متساوی الساقین است، پس $\hat{E} = \hat{D}$.

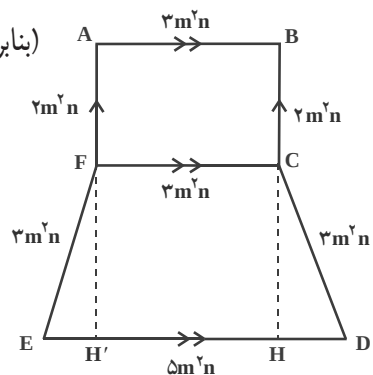
$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{D} \\ FE = CD \end{cases} \Rightarrow \triangle CHD \cong \triangle FH'B \quad (\text{بنابر وتر و یک زاویه})$$

$$\Rightarrow HD = EH' = m'n$$

$$\triangle CHD : CD^2 = CH^2 + HD^2$$

$$\Rightarrow (3m'n)^2 = CH^2 + (m'n)^2$$

$$\Rightarrow CH = 2\sqrt{2}m'n$$



مساحت دوزنقه + مساحت مستطیل = S (مساحت شکل)

$$= 3m'n \times 2m'n + \frac{(3m'n + 5m'n) \times 2\sqrt{2}m'n}{2} = (6 + 8\sqrt{2})m^2n^2$$

۶- هدف تمرین این است که بگوئیم حاصل $(a-b)^2$ را می توان با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، مستقیماً محاسبه کرد.

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$$

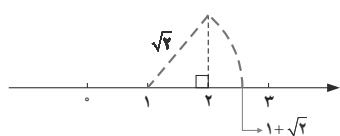
$$\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اشتباهات رایج

یکی از سؤال های متداول دانش آموزان در بحث عبارت های جبری، شمردن تعداد جمله های یک چند جمله ای است، آنها می گویند برای مثال $5x^2 + 7x$ دو جمله ای است. از طرفی ° یک جمله ای محسوب می شود، اکنون آیا $5x^2 + 7x + 0$ سه جمله ای است؟

در پاسخ به سؤال بالا می توان گفت: برای شمردن تعداد جمله های چند جمله ای، ابتدا باید آن را ساده کرد. برای این منظور جمله های متشابه را با یکدیگر جمع جبری می کنیم. سپس تعداد جمله های چند جمله ای ساده شده را می شماریم.

می دانیم ساده شده عبارت $5x^2 + 7x + 0$ دو جمله ای $5x^2 + 7x$ است. پس اضافه کردن جمله صفر، در تعداد جمله ها تأثیری ندارد.



توجه داشته باشید که عبارت $5x^2 + 7x + 1 + \sqrt{2}$ سه جمله ای محسوب می شود. زیرا $1 + \sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است و روی محور اعداد حقیقی یک نقطه منحصر به فرد است.

البته به طور دقیق تر می توان تعریف تعداد جمله های چند جمله ای را به صورت زیر آورد تا این گونه بدفهمی ها ایجاد نشود.

اگر در یک چند جمله ای ناصفر، k جمله غیرمتشابه ناصفر وجود داشته باشد، آن را یک $-k$ جمله ای می نامند. با این تعریف، یک جمله ای های ناصفر، مجدداً یک جمله ای هستند، اما این تعریف، برای صفر، تعداد جمله، تعریف نمی کند. اما قبلاً، بنا به تعریف، صفر را یک جمله ای محسوب کرده ایم. اشکالی که این مطلب، پیش آورده، این است که اگر مثلاً دو یک جمله ای غیرمتشابه را جمع کنیم باید یک دو جمله ای به دست آوریم، در حالی که $0 + x = x$. این پارادکس نشان می دهد که در جایی اشتباه کرده ایم و این اشتباه در همین فکر ساده است که «اگر دو یک جمله ای غیرمتشابه را جمع کنیم یک دو جمله ای به دست می آید». حرف درست آن است که «اگر دو یک جمله ای غیرمتشابه ناصفر را جمع کنیم یک دو جمله ای ساخته می شود». بنابراین، در اینجا نیز باید صفر را کنار بگذاریم و مطلب مورد نظر را برای چند جمله ای های ناصفر بیان کنیم.

اهداف

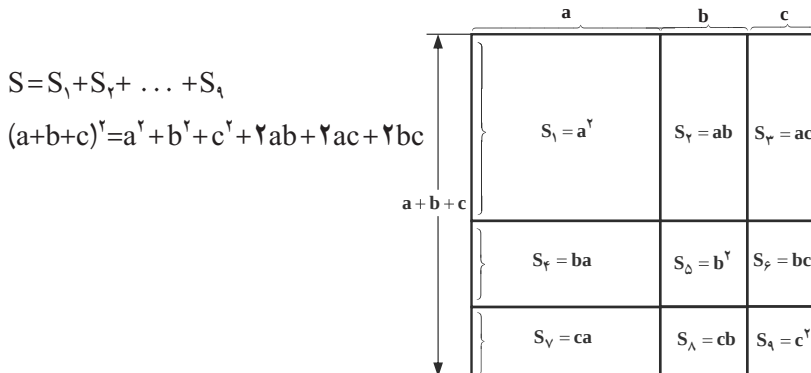
- اتحاد مربع سه جمله‌ای را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- اتحاد مزدوج را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- اتحاد یک جمله مشترک را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- چند جمله‌ای‌ها را به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک تجزیه کند.

روش تدریس

در درس اول اتحاد مربع دوجمله‌ای بررسی شد، در این فعالیت اتحاد مربع سه جمله‌ای با دو روش جبری بیان می‌شود. روش اول همان ضرب پراترها و استفاده از خاصیت پخشی است. در روش دوم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن $(a+b)$ را جمله اول و c را جمله دوم در نظر می‌گیریم. در اینجا از دانش‌آموزان بخواهید که برای این اتحاد یک عبارت کلامی بیان کنند، سپس به کمک عبارت کلامی در مرحله بعد حاصل $(a+b-c)^2$ را به صورت زیر بیابند.

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= (a+b+(-c))^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc\end{aligned}$$

برای درک درستی این اتحاد، علاوه بر روش جبری می‌توان از دیدگاه هندسی نیز درستی این اتحاد را درک کرد. برای این منظور مربعی به ضلع $(a+b+c)$ را در نظر بگیرید، مساحت این مربع برابر با $(a+b+c)^2$ است که می‌توان این مساحت را به صورت مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌های به کار رفته در شکل زیر در نظر گرفت.



در قسمت ۲ این فعالیت، اتحاد مزدوج بیان شده است، ابتدا با روش جبری این اتحاد بیان می‌شود، سپس از دیدگاه هندسی درستی اتحاد را درک کنیم، برای این منظور در سمت راست یک مربع به ضلع a را ملاحظه می‌کنید که مساحت آن برابر با a^2 است، اگر از این مربع مساحتی به اندازه b^2 (مساحت مربع به ضلع b) را جدا کنیم، آن‌گاه مساحت قسمت باقی‌مانده برابر با $S=(a^2-b^2)$ است. اکنون در قسمت پایین شکل سمت راست یک مستطیل با ابعاد b و $(a-b)$ را ملاحظه کنید، چنانچه این مستطیل را از قسمت خط‌چین جدا کنید و به پهلوئی سمت راست شکل باقی‌مانده بچسبانید یک مستطیل به ابعاد $(a+b)$ و $(a-b)$ به دست می‌آید که مساحت آن برابر با $S=(a+b)(a-b)$ است در نتیجه :

$$S=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

توجه : بیان عبارت کلامی متناظر با این اتحاد ضروری است.

صفحه ۸۷، قسمت ۲ کار در کلاس، از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک اتحاد مزدوج، حاصل ضرب پرانتزها را محاسبه کنند، برای این منظور جمع جبری جملاتی که در هر دو پرانتز علامت یکسانی دارند، به‌عنوان اولی و بقیه جملات پرانتز اول را دومی در نظر می‌گیریم، برای مثال :

$$(-4y-2z)(2z-4y)=(-4y)^2-(2z)^2=16y^2-4z^2$$

چون $-4y$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $-4y$ در نتیجه دومی $2z$ است.

$$(a-b-c+d)(b-a-c+d)=[(-c+d)+(a-b)][(-c+d)-(a-d)]$$

$$=(-c+d)^2-(a-d)^2$$

چون $(-c+d)$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $(-c+d)$ ، در نتیجه دومی $(a-b)$.

در فعالیت صفحه ۸۷ می‌خواهیم عبارت‌های جبری را که به‌صورت تفاضل دو مربع کامل هستند، به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم. برای این منظور اولی A و دومی B در نظر گرفته‌ایم. عبارت کلامی زیر می‌تواند در تجزیه کردن مفید واقع شود.

$$(دومی - اولی) (دومی + اولی) = مربع دومی - مربع اولی$$

در قسمت ۶ این فعالیت، متذکر شوید که تجزیه را تا جایی که همه جملات قابل تجزیه شدن باشند، ادامه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2)^2 - (y^2)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\downarrow} (x^2 + y^2) \\ &= \underbrace{(x - y)(x + y)}_{\downarrow} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۸۸؛ با چند تمرین، کاربرد اتحادها را در ساده‌شدن محاسبات عددی ملاحظه می‌کنید.

$$497 \times 503 = (500-3)(500+3) = 500^2 - 3^2 = 259991$$

$$(1001)^2 = (1000+1)^2 = (1000)^2 + 2(1000) \times 1 + 1^2 = 1002001$$

در فعالیت صفحه ۸۸، اتحاد یک جمله مشترک بیان شده است. توجه کنید که دیدگاه هندسی برای درک بهتر این اتحاد در تمرین ۵ صفحه ۸۹ آمده است.

در قسمت ۲ این فعالیت، می‌خواهیم تجزیه سه جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک انجام دهیم. برای این منظور معمولاً در سه جمله‌ای یک جمله مربع کامل داریم که از آنجا، جمله مشترک را پیدا می‌کنیم. برای مثال برای تجزیه سه جمله‌ای $x^2 + 7x + 10$ ؛ چون x^2 مربع کامل است، پس جمله مشترک $x =$ حال دو عدد صحیح پیدا می‌کنیم که حاصل ضربشان $10 +$ و حاصل جمعشان $7 +$ باشد. چون علامت $10 +$ مثبت است. پس هر دو عدد هم علامت هستند، در نتیجه جدول زیر را برای دو عدد خواهیم داشت که فقط در یک حالت حاصل جمعشان برابر با $7 +$ است.

$$xy = 10 \Rightarrow$$

	x	y	x+y	نتیجه
	+۲	+۵	+۷	✓
	-۲	-۵	-۷	×
	+۱	+۱۰	+۱۱	×
	-۱	-۱۰	-۱۱	×

در نتیجه داریم :

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

$$y^2 - y - 6 = (y+2)(y-3) \quad \text{مثال دیگر}$$

مربع کامل

$$xy = -6 < 0$$

	x	y	x+y	نتیجه
	-۲	+۳	+۱	×
	+۲	-۳	-۱	✓
	+۱	-۶	-۵	×
	-۱	+۶	+۵	×

توجه: بعد از حل چند تمرین، از دانش آموزان بخواهید، جدول را ذهنی تصور کنند و جواب را بگویند.

تمرین صفحه ۸۹

۴- هدف تمرین این است که با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک می توان درستی اتحاد مربع دوجمله ای را به دست آورد. در حقیقت اتحاد مربع دوجمله ای حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \quad (۱)$$

$$a=b \Rightarrow (x+a)(x+a)=x^2+(a+a)x+a \times a$$

$$\Rightarrow (x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

همچنین اگر a و b قرینه باشند، یعنی $b=-a$ در این صورت اتحاد مزدوج به دست می آید، یعنی اتحاد مزدوج نیز حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$b=-a \Rightarrow (x+a)(x-a)=x^2+(a+(-a))x+a \times (-a)$$

$$\Rightarrow (x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

اهداف

- تعریف نابرابری را بداند و بتواند در حل مسائل از تعریف استفاده کند.
- در یک نابرابری مانند $\frac{a^2b}{c} > 0$ علامت متغیرهای a ، b و c را تعیین کند.
- خواص نابرابری‌ها را درک کند.
- با استفاده از خواص نابرابری‌ها، نامعادله درجه اول یک مجهولی را حل کند و مجموعه جواب آن را به دست آورد.

روش تدریس

هدف از فعالیت صفحه ۹۰ ارائه مفهوم و تعریف نابرابری است. دانش‌آموزان قبلاً با مفهوم برابری با علامت «=» و نابرابری با علامت « $\neq$ » آشنا شده‌اند.

در حالتی که نابرابری بین دو عدد رخ می‌دهد در این صورت یکی از عددها از دیگری بزرگ‌تر است، مانند $3 \neq 2$ و در اینجا ۳ بزرگ‌تر از ۲ است و می‌نویسیم $3 > 2$ ، اکنون می‌خواهیم مفهوم $3 > 2$ را بیان کنیم. برای این منظور از مفهوم برابری استفاده می‌کنیم. $3 > 2$ ، یعنی اینکه مقدار مثبتی وجود دارد که اگر آن را به کوچک‌تر یعنی ۲ اضافه کنیم، حاصل برابر با ۳ می‌شود و آن مقدار مثبت، عدد ۱ است. در فعالیت، کفه‌های ترازو در حقیقت بیان‌کننده مفهوم بالا است، کفه وزنه سنگین‌تر پایین‌تر است، پس :

$$a \not\geq b, a \geq b, b \leq a$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد، تعریف نابرابری یک رابطه دوطرفه است که در این فعالیت خواسته شده برای رابطه‌های برابری زیر یک نابرابری بین متغیرها بنویسند.

الف) وقتی $x = y + 4$ ، یعنی به y ، ۴ واحد که اضافه شود، حاصل آن برابر x می‌شود، پس x از y بزرگ‌تر است.

- ب) $m + 1 = n + 3$ ، می‌توان نوشت $m = n + 2$ و از اینجا واضح است که $m > n$.
- ج) $a - 2 = b + 5$ ، یعنی $a = b + 7$ و در نتیجه $a > b$.
- د) $2m = 3n$ ، یعنی اگر m دوبرابر شود و n را سه برابر کنیم، حاصل آنها با هم برابر می‌شود. از آنجا که m ، n هر دو مثبت هستند و m در عدد کوچک‌تری ضرب می‌شود، پس $m > n$.
- یا به‌طور ساده از $2m = 3n$ می‌توان نتیجه گرفت $m = \frac{3}{2}n$ ، یعنی اگر n در کسری بزرگ‌تر از واحد ضرب شود حاصل آن با m برابر می‌شود، پس m از n بزرگ‌تر است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۹۱ می‌خواهیم با استفاده از نابرابری‌های داده شده نوعی استدلال کنیم و به کمک آن علامت متغیرها را پیدا کنیم.

(الف) نادرست است. برای مثال $5 > -3$ و این درحالی است که $0 \neq -3$.

(ب) درست است، زیرا اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت باشد، آن‌گاه هر دو مثبت یا هر دو منفی است یعنی a, b هم علامت هستند.

(ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ در این صورت دو حالت زیر را داریم.

حالت اول: صورت منفی و مخرج مثبت است. یعنی:

$$\begin{cases} ab < 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, b > 0 \end{cases}$$

حالت دوم: صورت مثبت و مخرج منفی است، یعنی:

$$\begin{cases} ab > 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b > 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, b < 0 \end{cases}$$

در نتیجه ۴ حالت مختلف پاسخ علامت‌های a, b, c است. بنابراین قطعاً نمی‌توان گفت که هر سه عدد منفی هستند، پس قسمت ج نادرست است.

(ج) درست است، چون همواره a^2 نامنفی است، پس برای اینکه $a^2 b < 0$ باید b منفی باشد. پاسخ قسمت ۳ کار در کلاس صفحه ۹۱:

$$\bullet \quad 3x - 1 > 7$$

$$\bullet \quad 8 > -2x + 3$$

هدف از فعالیت صفحه ۹۱، ارائه خواص نابرابری‌ها است. در اینجا می‌خواهیم دانش‌آموز با استدلال استقرایی خواص نابرابری‌ها را کشف کند.

خاصیت‌ها را می‌توان با تعریف نابرابری به صورت زیر اثبات کرد.

اثبات خاصیت ۱:

$$\begin{aligned} a > b &\Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \Rightarrow a + c = (b + c) + p \\ &\Rightarrow a + c > b + c \end{aligned}$$

اثبات خاصیت ۲ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \xrightarrow{c > 0} ac = bc + pc \\ \xrightarrow{pc > 0} ac > bc$$

اثبات خاصیت ۳ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \xrightarrow{c < 0} ac = bc + pc \\ \xrightarrow{pc < 0} ac + (-pc) = bc \xrightarrow{-pc > 0} bc > ac$$

در قسمت ۳ این فعالیت، می‌خواهیم مفهوم مجموعه جواب نامعادله درک شود، سپس در ادامه به کمک خواص نابرابری بتواند نامعادله یک مجهولی در جداول را حل کند و مجموعه جواب آن را به دست آورد.

تمرین صفحه ۹۳ :

$$a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow a > b \quad \text{۱- الف)}$$

$$u - v = -2 \Rightarrow u + 2 = v \Rightarrow v > u \quad \text{ب)}$$

$$2p - 2 = 2q - 3 \Rightarrow 2p + 1 = 2q \Rightarrow p + \frac{1}{2} = q \Rightarrow q > p \quad \text{ج)}$$

$$\frac{a - b}{2} = -3 \Rightarrow a - b = -6 \Rightarrow a + 6 = b \Rightarrow b > a \quad \text{د)}$$

۲- الف) چون b^2 همواره نامنفی است، پس صورت کسر باید منفی باشد؛ یعنی :

$$ac < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, c < 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, c > 0 \end{cases}$$

البته b می‌تواند مثبت یا منفی باشد، یعنی $b > 0$ یا $b < 0$.

$$\frac{a}{bc} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, bc < 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0 \\ \text{یا} \\ b < 0, c > 0 \end{cases} \\ a < 0, bc > 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0, c > 0 \\ \text{یا} \\ b < 0, c < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{ب)}$$

۴- نادرست است، زیرا : $a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) > 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b > 0, a-b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ \text{و} \\ a > -b \end{cases} \\ \text{یا} \\ a+b < 0, a-b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < b \\ a < -b \end{cases} \end{array} \right.$$

مثال نقض : $2^2 < (-3)^2$ و این درحالی است که $2 \not> -3$.

۵- از آنجا که $a, b > 0$ ، پس $a+b > 0$ و داریم :

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) > 0$$

$$\xRightarrow{(a+b) > 0} (a-b) > 0 \Rightarrow a > b$$

۶- الف) فرض کنید پول علی برابر با x باشد، پس $3x \geq 2x + 300$.

$$\text{ب) } \frac{1}{3}a + 4b \leq 6$$

۷- دو نفر روی هم در هر روز نیاز به $450 = 3 \times (65 + 85)$ کیلوکالری انرژی دارند. فرض کنیم

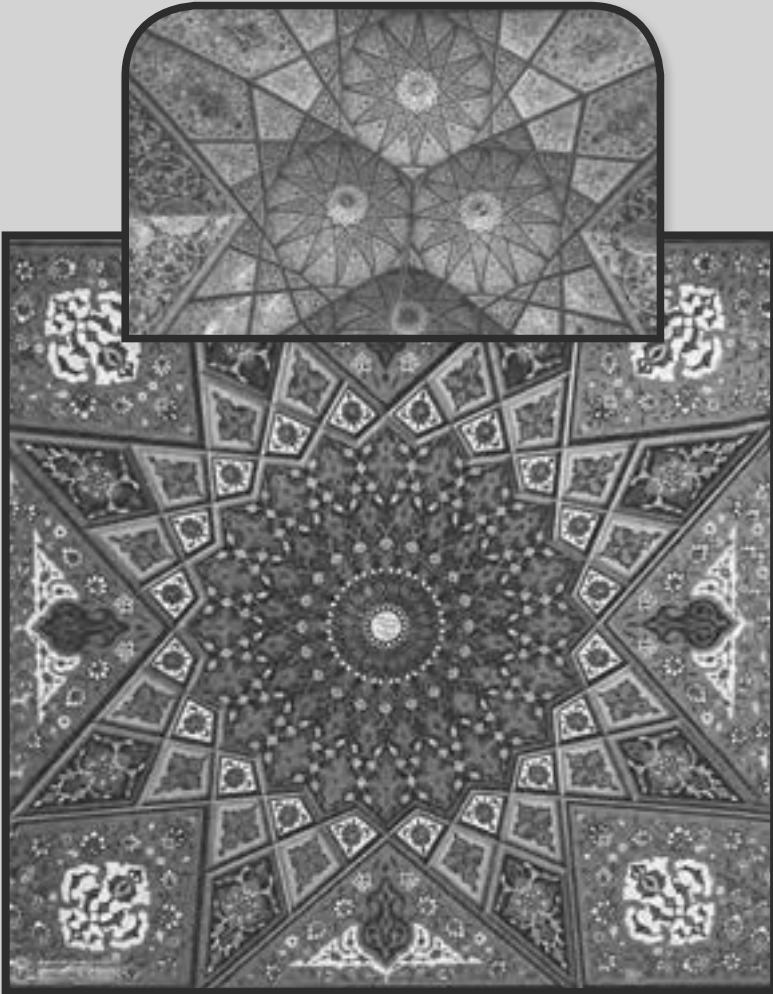
آنها x روز می‌توانند با این مواد غذایی در جنگل دوام آورند، پس داریم :

$$450 \cdot x \leq 4500 \Rightarrow x \leq 10$$

در نتیجه آنها حداکثر ۱۰ روز می‌توانند در جنگل با این مواد غذایی دوام بیاورند.



خط و معادله‌های خطی



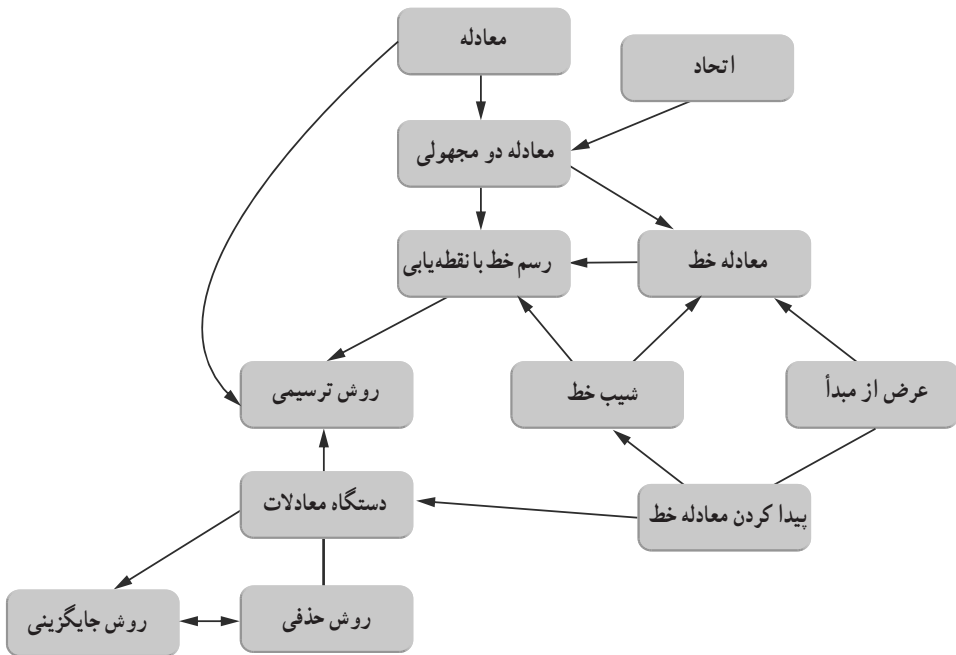
بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهدا، امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خطها در فرش بافی، کاشی کاری، نگارگری، خطاطی، گچ بری، کتیبه نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادله خط با استفاده از رابطه بین طول و عرض نقطه‌ها و قرار گرفتن بی‌شمار نقطه در کنار هم برای ساختن یک خط آغاز می‌شود. در درس دوم مفهوم شیب و عرض از مبدأ خط طرح شده و به کمک آن علاوه بر رسم خط، معادله خط مورد نظر پیدا می‌شود. در درس آخر این فصل مفهوم دستگاه معادله‌های خطی و روش‌های حل دستگاه، آموزش داده می‌شود. همچنین دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به کمک تشکیل دستگاه معادله، مسئله‌ها را نیز حل کنند.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

تصویر آغازین این فصل نمایشگر کاربرد خط در نقش‌های معماری اسلامی است. این ویژگی یکی از کاربردهای خط است و به طور کلی می‌توان خط را به عنوان ماده اولیه هندسه نام برد و با توجه به تأثیر و کاربرد هندسه در زندگی روزمره و یا سایر دروس اهمیت خط بیش از پیش آشکار می‌شود.

دانستنی‌هایی برای معلم

معادله‌های خطی یک نوع خاص از انواع معادله‌های دو مجهولی است. این موضوع در واقع بخشی از یک مفهوم کلی‌تر به نام تابع است. تابع نیز نوع خاصی از رابطه است. به همین دلیل درس معادله خط با مفهوم رابطه آغاز شده است. دو یا چند کمیت می‌توانند به طرق مختلف با هم رابطه داشته باشند. البته مفهوم رابطه بسیار عام‌تر است. برای مثال والدین با فرزندان رابطه دارند. دو پسر عمو با هم رابطه دارند. میزان انرژی تولید شده در بدن ما با مقدار غذایی که میل می‌کنیم رابطه دارد.

با توجه به گستردگی و کاربرد فراوان دو مفهوم رابطه و تابع در درس‌های مختلف ریاضی، موضوع تابع در کانون توجهات آموزشگران ریاضی قرار داشته است و در این زمینه مطالعات فراوانی انجام شده است. آناسفارد (Anna Sfard) در سال ۱۹۹۱ با مرور عمده پژوهش‌های انجام شده در خصوص تابع و آموزش آن جمع‌بندی کرد که مفاهیم مرتبط با تابع در دیدگاه فرایندی (Process) و عینی (objective) بررسی می‌شوند.

در آموزش این مفاهیم به طور سنتی به فرایندها پرداخته می‌شد و کمتر به عینی شدن مفاهیم توجه شده است. برای مثال وقتی یک معادله خطی مثل $2y - 3x = 4$ را به دانش‌آموزان بدهیم و از آنها بخواهیم شیب و عرض از مبدأ خط را پیدا کنند، آنها می‌توانند با طی کردن یک فرایند متداول و مشخص و تبدیل این معادله به فرم استاندارد $y = mx + n$ ، مقدار شیب و عرض از مبدأ را پیدا کرده و بیان کنند، اما این دو مفهوم برای آنها عینی نشده است به همین دلیل در پاسخ به سؤال زیر قادر به رسم تقریبی خط نیستند و درک درستی از این دو مفهوم از خود نشان نمی‌دهند.

سؤال: اگر $y = ax + b$ ، $b < 0$ ، $a > 0$ باشد، موقعیت خط را در محورهای مختصات به‌طور

تقریبی رسم کنید.

از طرفی دیگر مفاهیمی مثل تابع، بازنمایی‌های (representation) متعددی دارند. بحث بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم نیز بسیار مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار گرفته است. برای مثال تابع (و یا رابطه بین دو کمیت) را می‌توان به صورت کلامی توصیف کرد، همچنین می‌توان با زوج‌های مرتب مثل (۲، ۳) یا $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بیان کرد که به آن بازنمایی جدول نیز می‌گویند. تابع را می‌توان با یک ضابطه جبری نشان داد و یا نمودار آن را به صورت گرافیکی رسم کرد. بنابراین توصیف کلامی، جدول، جبری و گرافیکی، ۴ بازنمایی مختلف تابع هستند. در جدول زیر رابطه بین دیدگاه‌های مختلف و بازنمایی‌های متنوع تابع ارائه شده است.

دیدگاه	بازنمایی	جدول	جبری	گرافیکی
فرایندی				
عینی				

یک آموزش خوب وقتی شکل می‌گیرد که بازنمایی‌های مختلف تابع در کنار هم ارائه شوند و دانش‌آموز قادر باشد در هر ردیف (فرایندی یا عینی) در بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کرده و هر کدام را به دیگری تبدیل کند.

همچنین باید بتواند از دیدگاه فرایندی به عینی حرکت کرده و در هر بازنمایی، این موضوع نهادینه شود. در برنامه جدید آموزش معادلات خطی در کتاب ریاضی نهم سعی شده است تا براساس این چهارچوب نظری تألیف انجام شود تا دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با معادلات خطی درک بهتری داشته باشند.

توسعه مفاهیم

در صورتی که دانش‌آموزان شما توانایی لازم را برای طرح موضوعات تکمیلی دارند می‌توانید جهت تعمیق موضوعات این فصل به مفهوم دسته خط اشاره کرده و از دانش‌آموزان بخواهید نقطه هم‌رسی یک دسته خط را پیدا کنند. همچنین می‌توانید علاوه بر مثال‌های کتاب با طرح مسئله‌های ترجیحاً واقعی و کاربردی، زمینه را برای مدل‌سازی جبری فراهم کرده و دانش‌آموزان را با تبدیل مسئله داده شده به معادله‌ای خطی و تشکیل دستگاه بتوانند آن را حل کنند.

علاوه بر این می‌توانید مفاهیم مختلف این درک را با هم ترکیب کرده و مسئله‌های ترکیبی مانند نمونه زیر طرح کنید.

«معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد خط‌های $2x - y = 4$ و $3y - 2x = 5$ بگذرد و خط $y = 2x - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کند.»

طرح موضوعاتی مثل فاصله دو نقطه روی محورهای مختصات و همچنین شیب دو خط عمود برهم نیز می‌تواند به غنای بیشتر موضوعات این فصل بیفزاید.

استفاده از ابزار و تکنولوژی

برای رسم منحنی تابع‌های مختلف، انواع و اقسام نرم‌افزارها وجود دارد. با وارد کردن معادله

یک تابع یا یک خط، نمودار آن رسم می‌شود و دانش‌آموزان می‌توانند شکل توابع مختلف را مشاهده کنند.

نرم افزار GeoGebra نیز برای آموزش معادله خط بسیار کارآمد است. چرا که در این نرم افزار می‌توانید بازنمایی‌های مختلف تابع را به صورت هم‌زمان برای دانش‌آموزان نمایش دهید.

همچنین می‌توانید با تعریف دو متغیر (لغزنده) a, b در این نرم افزار خط به معادله $y=ax+b$ را رسم کنید. با تغییر دادن مقدارهای متغیر a (با توجه به ثابت بودن مقدار b) شیب خط تغییر کرده و دانش‌آموزان می‌توانند رابطه بین شیب خط و مقدار a را درک کنند. پس از آن می‌توانید مقدار a را ثابت در نظر بگیرید و با تغییر مقدار b دانش‌آموزان مفهوم عرض از مبدأ را درک کنند. به این ترتیب می‌توانید فعالیت اول درس دوم این فصل را شبیه‌سازی کنید.

با این نرم افزار می‌توانید تمام فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها را شبیه‌سازی کنید تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به این مفاهیم پیدا کنند. این نرم افزار همچنین ابزار مناسبی برای رسم خط است و در زمان تدریس صرفه جویی خواهد کرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- خط $2y-4x=8$ را در محورهای مختصات رسم کرده، شیب و عرض از مبدأ آن را پیدا کنید.

۲- آیا نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟

۳- نقطه‌ای از این خط را مشخص کنید که طول آن ۲ باشد.

۴- نقطه‌ای به عرض ۱- از این خط مشخص کنید.

۵- محل تقاطع خط را با محورهای مختصات مشخص کنید.

۶- مقدار k را طوری تعیین کنید که خط $y-kx=k+1$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۷- مقدار p را طوری تعیین کنید که نقطه $\begin{bmatrix} 2p \\ p+1 \end{bmatrix}$ روی خط $y=2x-1$ واقع شود.

۸- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه داده شده بگذرد.

الف) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

۹- زاویه بین دو خط $y=2$ و $x=4$ را پیدا کنید.

۱۰- دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

۱۱- قیمت یک دفتر و ۳ ماژیک ۲۹۰۰ تومان و قیمت ۲ دفتر و یک ماژیک ۴۳۰۰ تومان

است. قیمت هر کدام را پیدا کنید.

۱۲- جرم ۵ گلوله کوچک و ۲ گلوله بزرگ ۳۵۰۰ گرم و جرم ۴ گلوله کوچک و ۳ گلوله

بزرگ ۴۹۰۰ گرم است. جرم هر گلوله را پیدا کنید.

اهداف

- آشنایی با مفهوم رابطه بین دو مقدار
- درک مفهوم رابطه خطی
- رسم خط با معادله داده شده
- پیدا کردن نقطه‌ای از خط با معادله داده شده با ویژگی مورد نظر
- درک تفاوت معادله خط و اتحاد
- ابزار مورد نیاز :
- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط کش

روش تدریس

درس اول این فصل با مفهوم رابطه بین دو مقدار آغاز می‌شود. در کتاب درسی برای این موضوع سه مثال ذکر شده است. شما می‌توانید مثال‌های دیگری را نیز مطرح کنید. هدف فعالیت اول این درس آشنا کردن دانش‌آموزان با مفهوم رابطه خطی بین دو مقدار است.

همچنین در این فعالیت، ۳ بازنمایی مختلف خط (جدول، جبری و گرافیکی) در کنار هم مطرح می‌شوند. دانش‌آموزان پس از پیدا کردن نقطه‌ها متوجه می‌شوند که ویژگی این نقطه‌ها این است که روی یک خط قرار دارند، سپس رابطه بین دو مقدار را به صورت جبری $y=2x$ بیان می‌کنند. در کار درکلاس مربوطه نیز نمونه دیگری از رابطه خطی در کنار یک رابطه غیر خطی مطرح می‌شود تا دانش‌آموزان درک بهتری از مفهوم رابطه بین دو مقدار پیدا کنند.

در فعالیت دوم هدف این است که دانش‌آموزان بی‌شمار جواب‌های یک معادله درجه اول دو مجهولی را پیدا کنند و تفاوت آن را با اتحاد بیان کنند. نکته جالب این است که یک معادله دو مجهولی بی‌شمار جواب دارد ولی اتحاد نیست. نحوه پیدا کردن جواب‌های یک معادله دو مجهولی را در کلاس به بحث بگذارید.

در ادامه این فعالیت حدس زدن رابطه بین x , y برای یک خط داده شده و همچنین فرم استاندارد $y=ax+b$ آموزش داده می‌شود. در کار در کلاس این قسمت با تمرین رسم خط با معادله داده شده خط‌های مبدأ گذر نیز مطرح می‌شود.

در فعالیت سوم علاوه بر رسم خط، حدس زدن معادله خط، مورد نظر است و همچنین در

کار در کلاس یاد می‌گیرند که با دو روش ترسیمی و تحلیلی، یک نقطه از خط را پیدا و این دو روش را با هم مقایسه کنند.

سؤال ۳ از تمرین‌های این درس یکی از سؤال‌هایی است که در مطالعه تیمز مطرح شده بود. شکل سوم از سمت چپ پاسخ درست است چون نشان می‌دهد که در بدو تولد، نوزاد یک مقدار مشخص قد دارد و همچنین فرایند رشد آن ابتدا سریع است ولی پس از مدتی ثابت می‌ماند. در سؤال ۴ نیز هدف صرفاً حدس زدن رابطه بین x و y است. دانش‌آموزان با این نمونه‌ها در کلاس هشتم نیز آشنا شده بودند پاسخ‌ها به ترتیب عبارت است از:

الف) $y=3x$

ب) $y=x+2$

ج) $y=3x+1$

توصیه‌های آموزشی

- ۱- حدس زدن معادله خط با داشتن دو نقطه کار ساده‌ای نیست، لذا از طرح تمرین‌های پیچیده در این قسمت خودداری کنید. دانش‌آموزان پس از اینکه شیب و عرض از مبدأ را یاد گرفتند می‌توانند معادله خط را به طور مستقیم به دست آورند.
- ۲- روش‌های مختلف (ترسیمی - تحلیلی) را در حل تمرین‌ها به کار ببرید و با هم مقایسه کنید. این کار به درک بهتر موضوع کمک می‌کند.
- ۳- استفاده از نرم‌افزارهایی مثل GeoGebra برای آموزش بهتر این موضوع توصیه می‌شود.

اشتباهات رایج

- وقتی مسئله از دانش‌آموزان نقطه‌ای از خط را می‌خواهد آنها به طور معمول به پیدا کردن x یا y اکتفا می‌کنند و نقطه مورد نظر را نشان نمی‌دهند. برای مثال محل برخورد $y=1x-2$ با محور طول‌ها نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است نه $x=1$.
- در حدس زدن معادله خط، یک معادله‌ای می‌نویسند که نقطه برای یکی از نقطه‌ها درست است و فراموش می‌کنند نقطه دیگر را امتحان کنند.

اهداف

- درک مفهوم شیب و عرض از مبدأ
- پیدا کردن معادله خط با داشتن شیب و عرض از مبدأ
- رسم خط با کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ

ابزار مورد نیاز :

- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط کش
- ۳- نرم افزارهای مرتبط

روش تدریس

در این درس دانش آموزان با مفهوم شیب به سه صورت مختلف آشنا می شوند. در فعالیت اول صرفاً با مفهوم شیب و عرض از مبدأ آشنا می شوند و متوجه می شوند که تغییر دو پارامتر a ، b در معادله خط $y=ax+b$ چه تأثیری در شکل خط در محورهای مختصات می گذارد. در این فعالیت توجه آنها را به شیب های مثبت و منفی جلب کنید. در کار در کلاس مربوطه نیز دانش آموزان به صورت فرایندی شیب و عرض از مبدأ خط های داده شده را پیدا می کنند، بدون آنکه از این دو مفهوم درک عینی داشته باشند.

در فعالیت دوم تلاش شده است تا دانش آموزان از مفهوم شیب خط یک درک بهتری پیدا کنند. ابتدا با مقایسه شیب سه خط، پله و نسبت ارتفاع به طول شیب یک خط به صورت قدر مطلق معرفی می شود.

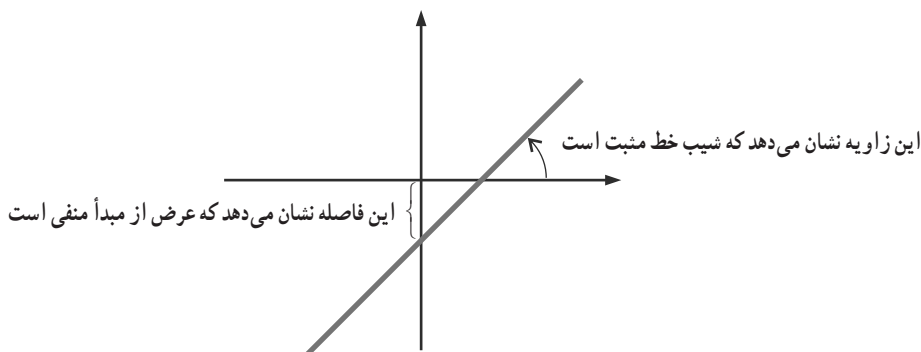
در سؤال های ۳ و ۴ این فعالیت دانش آموزان با رسم مثلث قائم الزاویه و نوشتن نسبت ارتفاع به قاعده (y به x) مقدار شیب را پیدا می کنند. اگر مثلث سمت راست خط شکل بگیرد شیب مثبت و اگر سمت چپ باشد شیب منفی خواهد بود.

در پایان فعالیت یاد می گیرند تا به کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ یک خط را رسم کنند. در مرحله اول، به کمک مفهوم عرض از مبدأ، نقطه اول را پیدا می کنند. در مرحله دوم به کمک مفهوم شیب دوم یک مثلث قائم الزاویه، نقطه دوم خط را پیدا کرده و در مرحله سوم با داشتن دو نقطه، خط را رسم می کنند.

در فعالیت سوم این درس دانش‌آموزان با خط‌های موازی محورها آشنا می‌شوند. برای اینکه درک کنند $x=2$, $y=3$ می‌توانند معادله خط باشند لازم است فرم کلی معادله‌های خطی $ax+by=c$ معرفی شود و دانش‌آموزان با قراردادن مقادیر مختلف به جای a , b , c خط‌های مختلفی را به دست آورند.

پس از آن متوجه می‌شوند که چگونه با تعیین ضرایب a , b , c می‌توانند معادله خط $x=2$ را پیدا کنند. در کار درکلاس مربوطه نیز به تمرین رسم خط‌های موازی محورها و نوشتن معادله‌های آنها می‌پردازند.

سؤال ۴ قسمت تمرین بسیار کلیدی است. وقتی $a > 0$ و $b < 0$ باشد شکل خط به صورت زیر خواهد شد.



در سؤال ۵ نیز می‌توان با رسم مثلث قائم‌الزاویه و داشتن عرض از مبدأ معادله خط را نوشت. در شکل سمت چپ خط محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است پس عرض از مبدأ ۱ است. با توجه به مثلث رسم شده شیب خط ۲ و با توجه به اینکه مثلث سمت چپ خط است شیب منفی می‌شود (۱-). پس معادله خط عبارت است از: $y = -2x + 1$.

در سؤال ۷ نیز موضوع شیب برای بار سوم مطرح شده است در این حالت با داشتن دو نقطه از خط و نوشتن رابطه مذکور می‌توان مقدار شیب خط را به دست آورد. بنابراین در سؤال ۸، شیب خط را می‌توان به کمک همین رابطه پیدا کرد و با داشتن شیب و یک نقطه از خط معادله آن را پیدا کرد.

توصیه‌های آموزشی

۱- رسم خط با داشتن شیب و عرض مبدأ و پیدا کردن معادله‌های خط رسم شده به درک بهتر

مفاهیم شیب و عرض از مبدأ کمک می‌کند.

۲- برای اینکه دانش‌آموزان از معادله $x=2$ درک درستی داشته باشند لازم است در معادله

$2 = x + 1 \times y$ به جای x ، y مقادیر مختلف قرار دهید تا دانش‌آموزان به حذف شدن مقدار y پی ببرند

و ثابت بودن مقدار x در مختصات نقطه‌های مختلف خط با عرض‌های متفاوت را درک کنند.

اشتباهات رایج

– یکی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان پس از اینکه مراحل پیدا کردن شیب خط را انجام می‌دهند

این است که به جای بیان ضریب x به عنوان شیب عدد و x را با هم بیان می‌کنند. برای مثال می‌گویند

شیب خط $2x$ است.

اهداف

- درک مفهوم دستگاه معادله‌های خطی
- درک مفهوم جواب مشترک در معادله
- حل دستگاه به روش ترسیمی
- حل دستگاه به روش‌های تحلیلی (حذفی و جایگزینی)
- تشکیل دستگاه معادله‌های خطی و حل مسئله به کمک آن

ابزار مورد نیاز :

- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط‌کش
- ۳- نرم‌افزارهای مرتبط

روش تدریس

شروع درس با یک فعالیت کاربردی مناسب است تا دانش‌آموزان چگونگی شکل‌گیری دستگاه معادلات خطی را درک کنند. در سؤال دوم نیز هدف درک مفهوم جواب مشترک دو معادله و مقایسه آن با مفهوم هندسی تقاطع دو خط است. در کار در کلاس روش ترسیمی حل دستگاه تمرین می‌شود. در فعالیت دوم دانش‌آموزان ابتدا دو قاعده مورد نیاز برای حل یک دستگاه را یاد می‌گیرند سپس روش حذفی که در کتاب انجام شده است را با این دو قاعده مرتبط می‌کنند. در کار در کلاس این بخش نیز حل دستگاه به روش حذفی را تمرین می‌کنند. در فعالیت سوم نیز مدل‌سازی یک مسئله به صورت تشکیل معادله سه روش حذفی، جایگزینی و معادله یک مجهولی با هم مقایسه می‌شود. در کار در کلاس نیز روش جایگزینی تمرین می‌شود.

سؤال ۳ از قسمت تمرین را به صورت زیر برای دانش‌آموزان حل کنید تا نحوه نوشتن جواب را نیز بیاموزند.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x - y}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ نقطه تقاطع دو خط}$$

$$y = ax + b \rightarrow y = \frac{-2}{3}x + b \rightarrow 0 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط است شیب خط $-\frac{2}{3}$ است

پس معادله خط عبارت است از: $3y + 2x = 2$ یا $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ در سؤال ۶ نیز چون دو خط با هم موازی هستند و شیب برابر دارند پس همدیگر را قطع نمی‌کنند و یا به عبارت دیگر می‌گوییم دستگاه جواب ندارد.

توصیه‌های آموزشی

مقایسه روش‌های مختلف حل دستگاه و یا تشکیل دستگاه و نوشتن معادله بسیار توصیه می‌شود.

طرح مسئله‌هایی که برای حل، نیاز به تشکیل دستگاه دارند از توصیه‌های جدی این قسمت است.

اشتباهات رایج

– وقتی دو معادله خط همدیگر را قطع نکنند می‌گوییم دستگاه جواب ندارد. در این موارد اغلب دانش‌آموزان می‌گویند دستگاه اشتباه است چون جوابی پیدا نشده است.

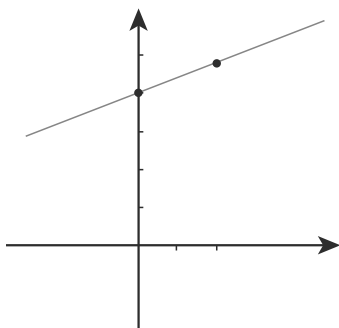
– وقتی دو معادله خط روی هم قرار می‌گیرند در واقع می‌توان گفت دستگاه تشکیل نشده است و یا به عبارت دیگر بگوییم دستگاه بی‌شمار جواب دارد. تفاوت این دو پاسخ در این است که چه چیزی را به عنوان تعریف دستگاه پذیرفته‌ایم. دانش‌آموزان به طور معمول تفاوت در تعاریف مختلف و تأثیر آن در پاسخ دادن به یک سؤال را درک نمی‌کنند.

حل تمرین های

تمرین

x	۰	۲
y	۴	۵

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.



الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است؟ خیر

ب) مختصات نقطه های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید. $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

ج) نقطه ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2}(-1) + 4 = \frac{-1+8}{2} = \frac{7}{2} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

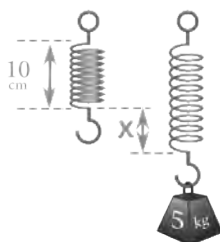
۲- طول یک فنر ۱۰ سانتیمتر است. وقتی وزنه ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y = 0.8x + 10$ پیدا می شود. اگر وزنه ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می شود؟

$$x = 5$$

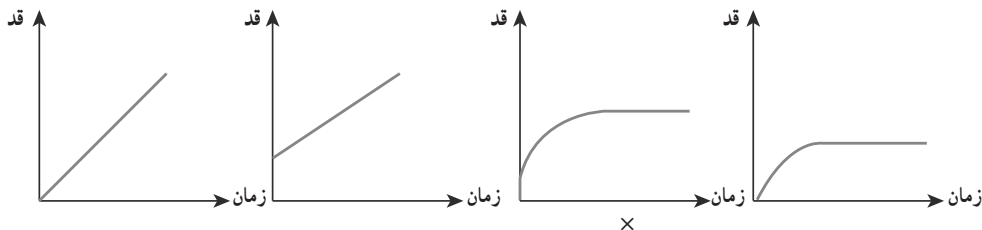
$$y = 0.8 \times 5 + 10$$

$$y = 4 + 10$$

$$y = 14$$



۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می دهد؟
با توجه به وضعیت های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است.



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$y = 3x$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = 3x + 1$$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \quad y = 0 \rightarrow x = +2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{3}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

$$y = -\frac{3}{5}x + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 = -3 + 4 = 1 \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۷- خط $y = -\frac{1}{4}x + 2$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید. بله، $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید. $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

x	0	2
y	2	1

$$y = -\frac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 2 = \frac{5}{2}$$

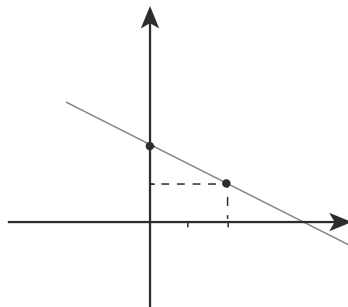
$$-2 = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$-\frac{1}{4}x = -4$$

$$x = 8$$

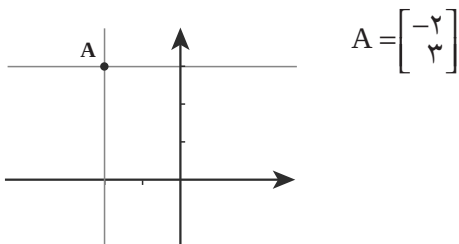
$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \rightarrow x = 4$$



نقاط برخورد خط با محورها $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱- خط‌های به معادله $y=3$ و $x=-2$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ 90°



۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ محل برخورد} \quad y = 0 \text{ محور طول‌ها}$$

$$x = 0 \text{ محور عرض‌ها}$$

۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

l) $3y - 2x = 6$

j) $4x - 2y = 8$

e) $2x - y = 3$

$$3y = 2x + 6$$

$$-2y = -4x + 8$$

$$-y = -2x + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = 2x - 4$$

$$y = 2x - 3$$

$$\text{شیب} = 2$$

$$\text{شیب} = 2$$

$$\text{شیب} = \frac{2}{3} \quad \text{عرض از مبدأ} = 2 \quad \text{عرض از مبدأ} = -4 \quad \text{عرض از مبدأ} = -3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

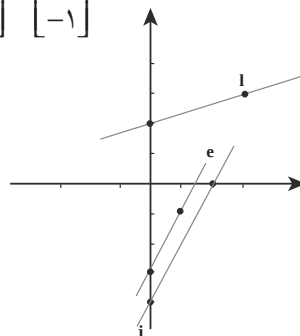
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

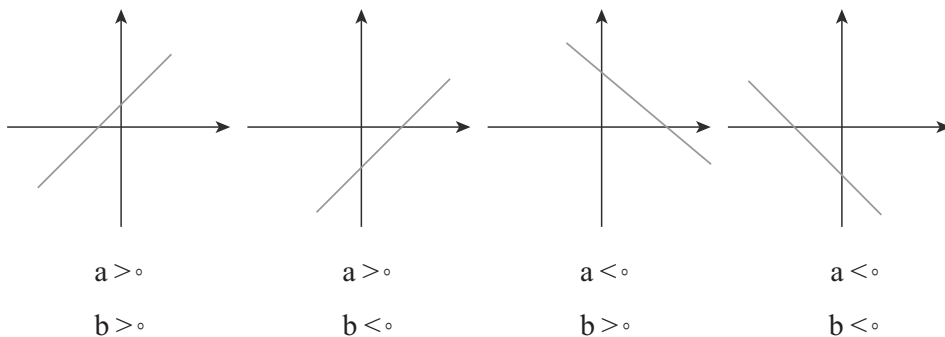
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

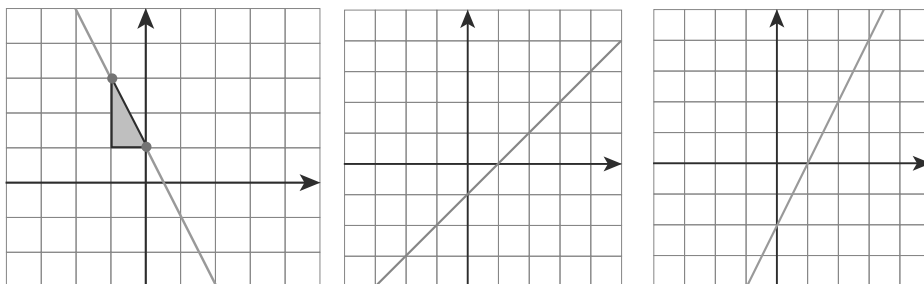
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



۴- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



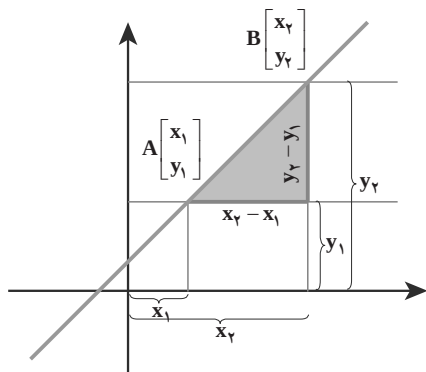
شیب $= -2$ $y = -2x + 1$ شیب $= 1$ $y = x - 1$ شیب $= 2$ $y = 2x - 2$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$\begin{aligned}
 2y &= 4x + 5 & y &= 2x + b \\
 y &= 2x + \frac{5}{2} & -1 &= 2 \times 1 + b \\
 & & -1 &= 2 + b \rightarrow b = -3 \\
 & & \boxed{y = 2x - 3} &
 \end{aligned}$$

شیب

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$y = -3x + b \rightarrow 2 = -3 \times (3) + b \quad b = 11 \quad y = -3x + 11$$

تمرین

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} 2(x - y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x - y) = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -1x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$5y = 18$$

$$\boxed{y = \frac{18}{5}}$$

$$-x + 2y = 7$$

$$x = 2 \times \frac{18}{5} - 7$$

$$\boxed{x = \frac{1}{5}}$$

$$۲) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 - 2y + 2 = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -3x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$-5y = -10 \quad \boxed{y = 2}$$

$$\boxed{x = 2}$$

۲- یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 3x + y - 1 & x + y &= 1 \\ 2x - y - 2 &= 0 & 1 + y &= 1 \\ \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} & \boxed{y = 0} \end{aligned}$$

$$3x = 3$$

$$\boxed{x = 1}$$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x - y = 1$ و $x + y = 1$ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{3}x + b \\ 0 &= -\frac{2}{3} \times 1 + b \\ b &= \frac{2}{3} \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

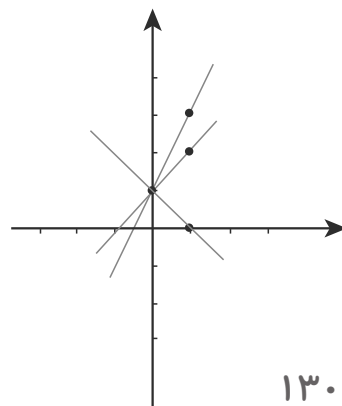
$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} & \quad x + y = 1 \\ \hline 2x &= 2 \\ \boxed{x = 1} & \end{aligned} \quad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 1 + y &= 1 \\ \boxed{y = 0} & \end{aligned}$$

۴- در معادله $y = ax + 1$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید. به ازای $a = 1$ و $a = 2$ و $a = -1$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

$$y = x + 1 \quad y = 2x + 1 \quad y = -x + 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقطه مشترک هر سه خط است.



۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2y = 16 \\ & & y = 8 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y = 20 \\ x + 8 = 20 \\ x = 12 \end{array}$$

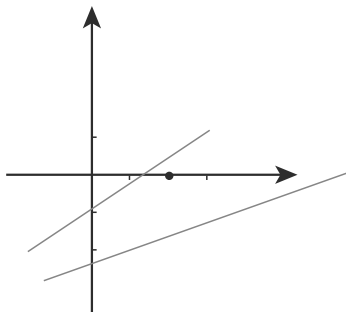
شترمرغ ۱۲ گاو ۸

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = -14 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{5}{4} \\ \hline y & -\frac{5}{6} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{7}{2} \\ \hline y & -\frac{7}{3} & 0 \end{array}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟ خیر



شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.

$$2x - 3y = 7$$

$$4x - 6y = 5$$

$$-3y = -2x + 7$$

$$-6y = -4x + 5$$

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{4}{6}x - \frac{5}{6} \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{5}{6}$$

دو خط دارای شیب مساوی هستند، پس موازی هستند.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$x + y = 70$$

$$2x = 96$$

$$48 + = 70$$

$$x = 48$$

$$22$$

سن پدر علی

سن علی



عبارت های گویا

پل طبیعت (تهران)



پل خیمه

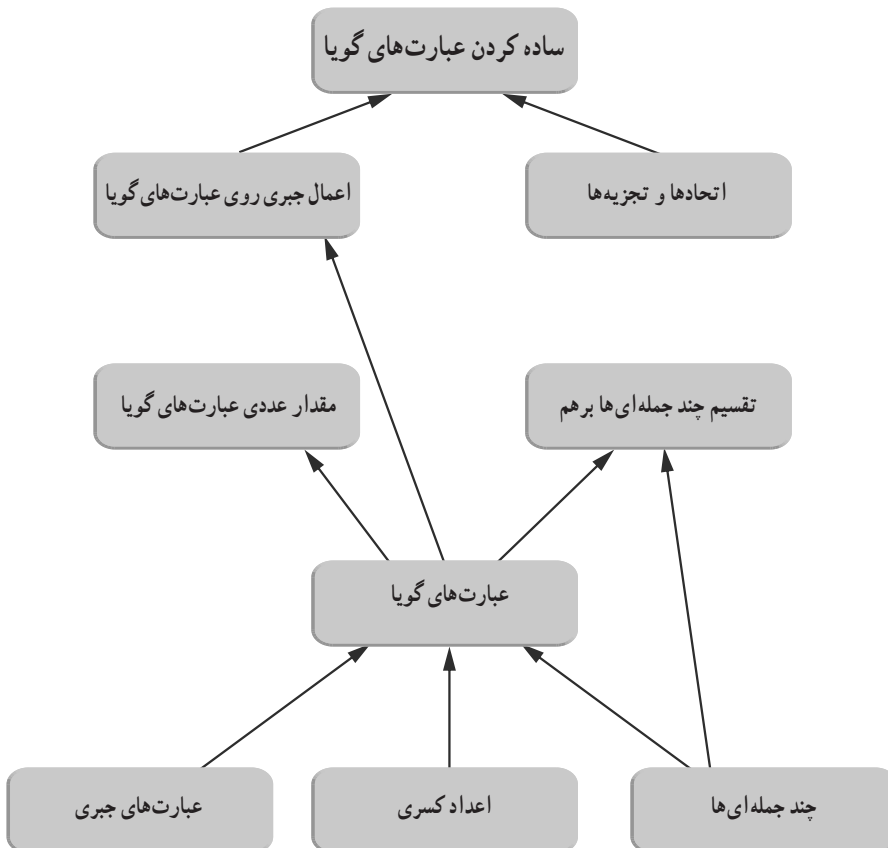
پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول هایی به دست می آید که با یک عبارت گویا بیان می شوند. مثلاً در مورد پل های عابر پیاده، بار

محاسباتی از دستور $2 + \frac{15^\circ}{L + 15^\circ}$ به دست می آید که در آن L طول بارگذاری شده بر حسب متر است.

نگاه کلی به فصل

در پایه هفتم و همچنین در فصل پنجم همین کتاب، دانش‌آموزان با عبارت‌های جبری آشنا شده‌اند. در این فصل که شامل ۳ درس است، در درس اول، دانش‌آموزان با مفهوم عبارت‌های گویا آشنا می‌شوند و چگونگی پیدا کردن مقدار عددی آنها را به ازای متغیرهای داده شده، یاد می‌گیرند و اینکه چگونه باید آنها را ساده کنند. در روند یادگیری این درس، مطالب خوانده شده در مورد عددهای گویا باید یادآوری شود تا دانش‌آموزان راحت‌تر و بهتر این درس را یاد بگیرند. درس دوم به اعمال جبری روی عبارت‌های گویا یعنی جمع، تفریق و ضرب و تقسیم می‌پردازد و در درس سوم، با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر چند جمله‌ای‌ها آشنا می‌شوند. اطلاعات این فصل، به دانش‌آموزان کمک خواهد کرد تا در حل معادلات گویا و نامعادلات گویا که در سال بعد به آن خواهیم پرداخت از این اطلاعات استفاده کنند.

طرح کلی مفاهیم فصل هفتم



تصویر عنوانی

با توجه به اهمیت پل‌ها و نقش اساسی‌ای که در برهه‌های مختلف زمان دارند، دو پل که توسط سازندگان ایرانی طراحی و ساخته شده است در تصویر عنوانی آمده است که برای محاسبه نیروی وارده به پل در طراحی آن، عبارت‌های گویا وجود دارند. به عبارت دیگر مفاهیم ریاضی از جمله عبارت‌های گویا، می‌توانند نقش مهمی را در بخشی از زندگی اجتماعی به صورت غیر مستقیم ایفا کنند. مثلاً ساخت پل‌های متحرک در زمان جنگ تحمیلی که اثر به‌سزایی در عملیات جنوب کشور داشته است.

اهداف : در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد :

- شناسایی عبارت‌های گویا و تشخیص آنها از عبارت‌های غیر گویا
- محاسبهٔ عددی عبارت‌های گویا به ازای مقادیر مختلف متغیر آن
- به دست آوردن مقدارهایی از متغیر که به ازای آنها، مقدار عددی عبارت گویا تعیین نمی‌شود.
- توانایی ساده کردن عبارت‌های گویا

ابزار مورد نیاز :

- ۱- آشنایی با کسرها و عبارت‌های جبری
- ۲- آشنایی با مقدار عددی عبارت‌های جبری
- ۳- آشنایی با چند جمله‌ای‌ها
- ۴- آشنایی با اعمال جبری روی کسرها

نگاه کلی به بخش اول

این بخش با حل یک مسئله آغاز می‌شود که هدف از آن درگیر کردن دانش‌آموزان با مفهوم نسبت و چند جمله‌ای‌هاست و با اطلاعات قبلی، می‌توانند آن را حل کنند. در واقع مفهوم عبارت گویا، که بلافاصله بعد از حل مسئله، تعریف می‌شود، برای دانش‌آموزان، مفهوم غریبی نیست و عملاً آن را در بسیاری از مسائل دیده‌اند ولی در این بخش، نامگذاری می‌شود تا بتوان بیشتر راجع به آن صحبت کرد. برای اینکه کاربردهایی از عبارت گویا در دنیای واقعی مطرح گردد، نمونه‌هایی از آن ذکر گردیده است. بعد از زمینه‌سازی تعریف رسمی عبارت‌های گویا، و در یک کار در کلاس، این مفهوم تثبیت می‌شود. با استفاده از یک فعالیت، مقدار عددی عبارت‌های گویا، نیز بلافاصله تعریف می‌شود تا در دانش‌آموزان، ایدهٔ عبارت‌های نمادین به عنوان اعدادی که با محاسبه روی چند عدد داده شده، به دست می‌آیند، تقویت شود. با استفاده از یک مثال و کار در کلاس، به تعمیق این مطلب پرداخته شده است.

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، با اشاره به ساده کردن اعداد کسری که دانش‌آموزان قبلاً خوانده‌اند، نحوهٔ محاسبهٔ ساده کردن عبارت‌های گویا بیان می‌گردد و در واقع فعالیت با این هدف

پیش‌بینی شده است و سپس برای تعمیق آن، کار در کلاس آورده شده است. سعی شده است نمونه‌های مختلفی از تمرینات آورده شود تا دانش‌آموزان با حل آنها بتوانند میزان یادگیری از مطالب این بخش را محک بزنند.

ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند عبارت‌های گویا را از غیرگویا تشخیص دهند و مقدارهای عددی آنها را در صورت قابل تعریف بودن، به دست آورند و تشخیص دهند که یک عبارت گویا به ازای چه مقدارهایی تعریف شده و به ازای چه مقادیری تعریف نشده است. همچنین دانش‌آموزان باید بتوانند در مسائلی که عبارت‌های گویا رخ می‌دهند، این گونه عبارت‌ها را تشکیل داده، محاسبات جبری با آنها انجام دهند و بتوانند آنها را ساده کنند.

روش تدریس

هدف کلی این درس، آشنایی دانش‌آموزان با عبارت‌های گویا است. با توجه به اینکه در سال‌های گذشته، مفاهیم مساحت و نسبت را یاد گرفته‌اند، در واقع با عبارت‌های گویا آشنا شده‌اند ولی نه با عنوان فوق، بلکه از آن برای حل مسائل استفاده کرده‌اند. پس شروع درس را با یک مسئله‌ای که قادر به حل آن هستند شروع می‌کنیم اما نه با این هدف که آن را حل کنیم بلکه نشان دهیم در حل این مسئله، عبارت‌های گویا حضور دارند و در نتیجه بتوان یک تعریف ساده برای عبارت‌های گویا عنوان کرد. از آنجا که دانش‌آموزان علاقه‌مند هستند مفاهیمی که یاد می‌گیرند را در زندگی روزمره مشاهده کنند و کاربرد آن را ببینند، مثال‌هایی از این نوع مسائل در ادامه آورده شده است.

جهت شناخت بهتر از عبارت‌های گویا، نمونه‌هایی به عنوان کار در کلاس داده شده است که دانش‌آموزان باید بتوانند، تشخیص دهند که کدام عبارت داده شده گویاست و کدام عبارت، گویا نیست. در صفحه ۱۱۴، عبارت‌هایی داده شده است که گویا هستند، در این عبارت‌ها، سعی شده است که توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کند که اگر اعداد غیرگویا را دیدند، متوجه شوند که هیچ خللی در عبارت‌های گویا ایجاد نمی‌کند و بلافاصله مثال‌هایی از عبارت‌های غیرگویا آورده شده است که متغیر (یا متغیرهای) داده شده، شرایط تعریف عبارت‌های گویا را ندارند.

هدف از فعالیت طراحی شده در صفحه ۱۱۵، یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا است. دانش‌آموزان باید متوجه شوند که در یافتن مقدارهای عددی، ممکن است تقسیم بر صفر پیش آید که

بی معنا است و باید متوجه شوند که عبارت‌های گویا، ممکن است در بعضی از مقادیر برای متغیر (یا متغیرهایشان) تعریف نشوند. البته ذکر این نکته ضروری است که هدف از این بخش، مفهوم «دامنه تعریف متغیر» نمی‌باشد و تنها این نکته باید مدنظر دانش‌آموزان باشد که به ازای چه مقادیری از متغیرها، می‌توان گفت که آن عبارت گویا، تعریف نشده است. در همین راستا، کار در کلاس صفحه ۱۱۶، طراحی شده است.

عبارت‌های جبری داده شده در این کار در کلاس به گونه‌ای است که از اطلاعات فصل پنجم تبعیت می‌کند و یادآوری مطالب آن فصل نیز می‌باشد. چند جمله‌ای‌های درجه دوم نیز با استفاده از تجزیه‌های خوانده شده در فصل پنجم، به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای از د - ج ظاهر خواهند شد مگر نمونه (د) که مخرج کسر، $x^2 + 4$ است و همواره مثبت است و لذا هیچگاه صفر نمی‌شود. برای ساده کردن عبارت‌های گویا، ابتدا مطالب مربوط به ساده کردن عددهای گویا را آورده‌ایم که دانش‌آموزان با آن قبلاً آشنا شده‌اند و اشاره کرده‌ایم که روش ساده کردن عبارت‌های گویا نیز، عیناً مشابه ساده کردن عددهای گویاست و فعالیت صفحه ۱۱۶ نیز با یک مثال ساده شروع شده است که دانش‌آموزان فکر نکنند که این بخش، با قسمت‌های قبل متفاوت است و به راحتی می‌توانند به ساده کردن عبارت‌های گویا بپردازند.

در کار در کلاس پایانی این بخش، عبارت‌های گویایی داده شده است که قابل ساده کردن هستند. در قسمت (۱) بند (د)، در صورت کسر، عبارت $x^4 - y^4$ داده شده است که قبلاً همین عبارت جبری در صفحه ۸۷، به عنوان اتحاد مزدوج در یک فعالیت آمده است که می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که ساده شده این فعالیت را، در اینجا استفاده نمایند و هدف از قسمت (۲) عبارت گویای داده شده در این کار در کلاس، بدفهمی رایج دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های گویاست.

در تمرین ۲ قسمت (د)، صورت عبارت گویای داده شده، یک چندجمله‌ای از درجه سوم است که ابتدا از y که عامل مشترک بین همه آنهاست، فاکتور می‌گیریم و سپس، عبارت درجه دوم بدست آمده را با استفاده از اتحاد جمله مشترک، به دو عبارت جبری درجه یک تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y} &= \frac{y(y^2 - 2y - 3)}{y(y+1)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{y+1} \\ &= \frac{(y+1)(y-3)}{y+1} = y-3\end{aligned}$$

در تمرین ۳، دانش‌آموزان باید بتوانند قرینه یک عبارت جبری داده شده را درست تشخیص دهند که به جز قسمت (الف) بقیه قسمت‌های داده شده، یا برابر یک و یا برابر ۱- می‌باشند.

تمرین ۴ نیز با همان دید قرینه‌یابی طراحی شده است و ضرب عدد ۱- در صورت یا مخرج موردنظر بوده است. در تمرین ۵، باید دقت کنید با استفاده از اتحاد جمله مشترک و فاکتورگیری عامل مشترک، چه ارتباطی با عبارت گویای داده شده دارد و با استفاده از قانون ضرب یک عبارت گویا در صورت و مخرج کسر داده شده، عبارت جاخالی را تشخیص دهید. به عنوان نمونه :

$$\text{الف)} \quad \frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^3+z}$$

داده شده است. ابتدا از عبارت سمت راست، داریم :

$$z^3+z = z(z^2+1)$$

حال به عبارت گویای سمت چپ دقت می‌کنیم. کافی است صورت و مخرج را در عبارت جبری z^2+1 ضرب کنیم.

$$\frac{(1-z)(z^2+1)}{z(z^2+1)} = \frac{\boxed{(1-z)(z^2+1)}}{z^3+z}$$

تمرین ۶ به گونه‌ای طراحی شده که بعضی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان را نشان دهد. در واقع به غیر از قسمت (الف) و (و) که با عبارت داده شده برابر نمی‌باشند، مابقی قسمت‌ها، دقیقاً با عبارت گویای داده شده برابر می‌باشند و در واقع از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به عمل جمع و همچنین خاصیت تجزیه یک کسر، به چند کسر با مخرج یکسان، استفاده شده است.

توصیه‌های آموزشی

۱- در تعریف عبارت گویا در صفحه ۱۱۴، این نکته را اضافه کنید که باید مخرج کسر، غیر صفر باشد.

۲- اگر فعالیت مناسبی برای تعریف عبارت گویا به غیر از مسئله طرح شده در ابتدای صفحه ۱۱۴ مد نظر دارید، بهتر است از مواردی صحبت گردد که دانش‌آموزان قبلاً با آن آشنا بوده‌اند. مثلاً «نسبت طلایی»، می‌تواند به عنوان یک عبارت گویا به دانش‌آموزان کمک کند تا نمونه دیگری از عبارت‌های گویا را بشناسند.

۳- در بحث یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا، باید این‌گونه نتیجه‌گیری شود که عبارت‌های گویا به‌ازای بعضی مقادیر داده شده، به متغیرشان، تعریف نشده‌اند و نباید به مفهوم «دامنه» تعریف یک متغیر پرداخت.

اشتباهات رایج

دانش‌آموزان معمولاً در ساده‌کردن عبارت‌های گویایی که یک عبارت جبری مشترک در صورت و مخرج کسر دارند، دچار اشتباه می‌شوند. به این مثال دقت کنید.

$$\frac{\cancel{3x} + 4}{\cancel{3x} + 4} = \frac{1}{4}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، دانش‌آموز فکر می‌کند که عامل $3x$ در صورت و مخرج مشترک است و می‌تواند آنها را ساده کند. در این‌گونه موارد، باید تذکر داده شود که تنها و فقط تنها وقتی می‌توان یک عامل را حذف کرد که بتوان آن را به‌صورت حاصل ضرب در عبارت دیگری ساده کرد. نمونه‌های دیگری از این‌گونه اشتباهات در سؤالات ارزشیابی آمده است.

نمونه سؤالات ارزشیابی

- ۱- یک عبارت گویا و یک عبارت غیرگویا مثال بزنید.
- ۲- جمله‌های درست را با علامت $\checkmark$ و نادرست را با علامت $\times$ مشخص کنید.
 - ☐ الف) عبارت $2\sqrt{x}$ یک عبارت گویاست.
 - ☐ ب) عبارت $4|x|$ یک عبارت گویا نیست.
 - ☐ ج) عبارت $\frac{x+1}{1+\sqrt{a}}$ یک عبارت گویا نیست.
- ۳- مقدار عددی عبارت $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ را به‌ازای ۱ و -۱ و ۰ بیابید. آیا عددی می‌توان یافت که به‌ازای آن این عبارت گویا، تعریف نشود؟
- ۴- کدام یک از عبارت‌های زیر گویا می‌باشند.

ب) $\sqrt{2} + x - x^2$

الف) $\sqrt{1+x}$

د) $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x}$

ج) $\frac{1+\sqrt{x^2}}{1-x^2}$

۵- عبارت گویای $\frac{2x+1}{mx+1}$ به ازای $\frac{-1}{2}$ تعریف نمی‌شود. m را بیابید.

۶- جاهای خالی را طوری پر کنید که کسرهای با هم مساوی باشند.

الف) $\frac{bx + bx^2}{b^2 - x^2} = \frac{b(\dots + \dots)}{(\dots + \dots)(\dots - \dots)}$

ب) $\frac{z-t}{\dots} = 1$

ج) $\frac{z-t}{\dots} = -1$

د) $\frac{x}{y} = \frac{\dots}{4y}$

ه) $\frac{3}{x} = \frac{\dots}{4x^3}$

و) $\frac{2}{b} = \frac{\dots}{abc}$

ز) $\frac{\sqrt{8}}{x} = \frac{\dots}{x(x+2)}$

۷- عبارت گویای $\frac{ay}{y+a}$ با کدام یک از عبارات زیر برابر نیست؟

الف) $a \times \frac{y}{y+a}$

ب) $\frac{y}{a}$

ج) $ay \times \frac{1}{y+a}$

د) $\frac{y}{y+a} \times \frac{a}{y+a}$

۸- هریک از عبارت‌های داده شده در ردیف اول را به عبارت مساوی آن در ردیف دوم وصل کنید.

ردیف اول: $\frac{x-3}{x+4}$ $\frac{x+3}{x-4}$ $\frac{x-3}{x-4}$ $\frac{x+3}{x+4}$ $\frac{3-x}{x+4}$ $\frac{x+3}{4-x}$

ردیف دوم: $\frac{-x-3}{4-x}$ $\frac{-x-3}{-x-4}$ $\frac{3-x}{-x-4}$ $\frac{-x+3}{-x+4}$ $\frac{x-3}{-x-4}$ $\frac{-x-3}{x-4}$

۹- تنها یکی از عبارت‌های گویای زیر، ساده می‌شود. مشخص کنید که کدام یک می‌باشد.

الف) $\frac{x^2+2}{x^2}$

ب) $\frac{x^2+2}{2}$

ج) $\frac{x^2+y^2}{y^2}$

د) $\frac{x^2-5x}{x}$

۱۰- تنها یکی از عبارات گویای زیر، با عبارت گویای $\frac{x-3}{4-x}$ برابر نیست. مشخص کنید که آن کدام می باشد.

الف) $\frac{3-x}{x-4}$ ب) $\frac{x+3}{4+x}$ ج) $-\frac{3-x}{4-x}$ د) $-\frac{x-3}{x-4}$

۱۱- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{m^2-n^2}{-m+n}, \frac{(a-3)(x+y)}{(3-a)(x-y)}, \frac{5k-10}{20-10k}, \frac{7x-21}{63-21x}$$

اهداف

- عبارت‌های گویا را بتواند با یکدیگر جمع و تفریق کند.
- عبارت‌های گویا را بتواند با یکدیگر ضرب و یا بر یکدیگر تقسیم کند و آنها را ساده کند.
- بتواند عبارت‌های گویای مرکب را ساده کند.

ابزار مورد نیاز :

- ۱- آشنایی با اعمال جبری روی کسرها
- ۲- ساده کردن کسرها و هم‌مخرج کردن کسرها

روش تدریس

هدف از این درس، انجام اعمال ضرب و تقسیم و جمع و تفریق روی عبارت‌های گویاست و اینکه در ادامه دانش‌آموزان بتوانند عبارت‌های کسری که هم‌صورت و هم‌مخرج آن، یک عبارت گویاست، ساده کنند. برای همین منظور، ابتدا با یادآوری عمل ضرب و تقسیم روی عددهای گویا، یک فعالیت طراحی شده است که هدف از آن، انجام عمل ضرب و تقسیم روی عبارت‌های گویا با همان تکنیک مربوط به عددهای گویا می‌باشد. بهتر است در انجام فعالیت داده‌شده، بعد از قسمت (الف)، قسمت (د) انجام گیرد و بعد قسمت‌های باقی‌مانده کامل گردد. کار در کلاس صفحه ۱۲۰ نیز در جهت تعمیق یادگیری عمل ضرب و تقسیم روی عبارت‌های گویا می‌باشد. جهت انجام عمل جمع و تفریق روی عبارت‌های گویا، مجدداً عمل‌های جمع و تفریق روی عددهای گویا را که دانش‌آموزان با آنها آشنا بوده‌اند، یادآوری کرده‌ایم و اشاره کرده‌ایم که عیناً همان اعمال روی عبارت‌های گویا نیز قابل انجام است و به همین منظور در فعالیت صفحه ۱۲۰، در قسمت راست نمونه عمل جمع یا تفریق را روی اعداد گویا آورده‌ایم و انتظار داریم که دانش‌آموزان، به‌طور مشابه همان عمل را روی عبارت‌های گویای داده شده انجام دهند. دقت شود که نمونه‌های آورده‌شده در این فعالیت به‌گونه‌ای طراحی شده است که یا دارای یک مخرج مشترک می‌باشند و یا، مخرج یک کسر، مضربی از مخرج کسر دیگر است و در ساده کردن عبارت گویا، نباید به دنبال مفهوم کوچک‌ترین مخرج مشترک برویم و حداکثر پس از محاسبه، عمل ساده‌سازی را انجام دهیم تا عبارت‌های اضافی را حذف کنیم.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱ در ادامه همان فعالیت قبلی است با این تفاوت که نمونه مرتبط با

عددهای گویا در آن ذکر نشده است. در قسمت (ب) این کار در کلاس، از این نکته استفاده شود که عدد منفی می تواند از مخرج کسر به قبل از خط کسری منتقل شود. یعنی:

$$\frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} - \frac{4}{x}$$

و سپس عمل تفریق انجام پذیرد.

در ادامه به عبارت های گویای مرکب پرداخته ایم و در فعالیت صفحه ۱۲۱، دو روش را برای ساده کردن کسره های مرکب ذکر کرده ایم که در روش اول، صورت و مخرج کسر را در بیشترین توان مخرج کسر داده شده ضرب می کنیم و سپس با روش های قبلی که به دانش آموزان آموخته اید، آن را ساده می کنیم. در روش دوم، ابتدا با استفاده از مخرج مشترک گیری، عبارت های گویای داده شده را تبدیل به یک عبارت گویا در صورت و یک عبارت گویا در مخرج می کنیم و با توجه به اینکه عمل تقسیم عکس عمل ضرب است، آنها را به صورت حاصل ضرب دو عبارت گویا نوشته و سپس با اطلاعات به دست آمده از قسمت های قبل، آنها را ساده می کنیم. در جهت تعمیق به فعالیت داده شده، کار در کلاس صفحه ۱۲۲ آورده شده است.

فعالیت و کار در کلاس بعدی، هر دو مرتبط با مفاهیم هندسی است که دانش آموزان از قبل با آنها سر و کار داشته اند و با کمک گرفتن از مفاهیم عبارت های گویا، و ساده کردن آنها، می توانند مسئله داده شده را حل نمایند.

در تمرین ۱، قسمت (ج)، ابتدا عبارت های گویای داده شده را با استفاده از اتحادها ساده می کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18} \\ &= \frac{\cancel{(x-2)}^2}{4xy\cancel{(x-2)}} \div \frac{(x+3)(x-2)}{6(x^2+3)} \\ &= \frac{(x-2)}{4xy} \div \frac{(x+3)(x-2)}{6(x^2+3)} \\ &= \frac{\cancel{(x-2)}}{4xy} \times \frac{6(x^2+3)}{(x+3)\cancel{(x-2)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{2}(x^2 + 3)}{\cancel{2}xy(x + 3)} = \frac{3(x^2 + 3)}{2xy(x + 3)}$$

هدف از تمرین ۳، اشاره به یکی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان است که در ساده کردن عبارت‌های گویا، به عمل ضرب بین عامل‌های مشترک دقت نمی‌کنند و عبارت‌های داده‌شده زیر را به صورت غلط ساده می‌کنند:

$$\frac{a^2 + 5}{a^2} = 5 \quad \text{غلط} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2} = b^2 \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^2 + 3}{3} = a^2 \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^2 + 5a}{a} = \frac{a(a + 5)}{a} = a + 5 \quad \text{صحیح}$$

هدف از تمرین ۵، توجه به این نکته است که علامت منفی می‌تواند هم در صورت کسر، هم در مخرج کسر و هم در کنار کسر ظاهر شود و هیچ فرقی هم نخواهد کرد. یعنی:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

در تمرین‌های ۶ و ۸، اشتباهات رایج دانش‌آموزان مورد توجه قرار گرفته است و حل این دو تمرین، دقت دانش‌آموزان را بالا می‌برد و اگر دانش‌آموزان در انجام عملیات جبری خواسته شده روی عبارت‌های گویا مشکلاتی داشته باشند، این مشکلات ظاهر می‌گردد و معلمین می‌توانند موارد اشتباه را رفع نمایند.

تمرین ۱۱، از جمله تمرین‌هایی است که دارای جواب باز پاسخ است و می‌تواند به تعداد هریک از دانش‌آموزان کلاس، جواب صحیح داشته باشد.

توصیه‌های آموزشی

۱- در جمع و تفریق عبارت‌های گویا، سعی کنید از روش ارائه شده در کتاب پیروی کنید و از به کار بردن مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک، خودداری نمایید.

۲- در ساده کردن عبارت‌های گویای مرکب، از دانش‌آموزان بخواهید که کدام روش را بهتر

درک می‌کنند و دلیل آن را بخواهید و سپس به آنها توصیه کنید که از روشی استفاده کنند که برای آنها راحت‌تر و قابل فهم‌تر است.

۳- روی اشتباهات رایجی که در این بحث، دانش‌آموزان به آن می‌پردازند، بیشتر متمرکز شوید و با مثال‌های بیشتری، سعی کنید که این اشتباهات را تکرار نکنند.

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، در ساده کردن عبارت‌هایی است که یا در صورت کسر و یا در مخرج کسر، عامل ضرب بین عوامل مشترک وجود ندارد مانند

$$\frac{x+5}{x} = 5 \text{ غلط}$$

برای پرهیز از این گونه اشتباهات، باید به دانش‌آموزان متذکر شوید که فقط زمانی می‌توانند عامل مشترک (مثلاً x در مثال بالا) را از صورت و مخرج ساده کنند که هم صورت کسر به صورت حاصل ضرب دو عبارت (یا چند عبارت) نوشته شده باشد و هم مخرج کسر. در صورتی که در مثال بالا، $x+5$ را نمی‌توان به صورت حاصل x در یک عبارت دیگر نوشت:

۲- یکی دیگر از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، ضرب عدد منفی در پشت پرانتز، بدون در نظر گرفتن مفهوم پرانتز است. به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{2y}{y-2} - \frac{4y-1}{y-2} = \frac{2y-4y-1}{y-2}$$

که غلط است و عدد -1 فقط در $4y$ ضرب شده است. در صورتی که صحیح آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{2y}{y-2} - \frac{4y-1}{y-2} &= \frac{2y-(4y-1)}{y-2} \\ &= \frac{2y-4y+1}{y-2} = \frac{-2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید:

$$\text{الف) } \frac{x-2}{2x-3} \times \frac{4x-6}{x^2-4} \quad \text{ب) } \frac{x-2}{x-3} \times \frac{2x-6}{x+5}$$

$$\text{ج) } \frac{x^2-16}{x^2-4x+4} \times \frac{x-2}{x^2+6x+8} \quad \text{د) } \frac{x^5y^4}{3xy} \div \frac{1}{x^3y}$$

$$\text{هـ) } \frac{x+3}{x^2-2x+1} \div \frac{x+3}{x-1}$$

$$\text{و) } \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x-18} \div \frac{x^2-1}{x^2-7x+6}$$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید :

$$\text{الف) } \frac{y}{t} + \frac{2}{5} \quad \text{ب) } \frac{11}{5x} - \frac{1}{5x} \quad \text{ج) } \frac{x^2}{x+5} - \frac{25}{x+5}$$

$$\text{د) } \frac{y^2}{y+6} - \frac{36}{y+6} \quad \text{هـ) } \frac{-3p+7}{p^2+7p+12} + \frac{8p+13}{p^2+7p+12}$$

$$\text{و) } x - \frac{1}{x} \quad \text{ز) } 3 + \frac{2}{x+2} \quad \text{ح) } 1 - \frac{1}{1+x}$$

۳- دانش‌آموزی دو عبارت گویا را با هم جمع کرده است و جواب را به صورت ساده شده $\frac{3}{5-y}$ نوشته است.

دانش‌آموز دیگری نیز همین مسئله را حل کرده و جواب را به صورت ساده شده $\frac{-3}{y-5}$ نوشته است.

آیا هر دو جواب صحیح است؟ توضیح دهید.

۴- مانند نمونه، ضرب‌های داده‌شده را حل کنید.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{الف) } \frac{3x}{x+1} \times \frac{6x^2}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^3}{3y} \times \frac{9y^2}{x^5}$$

$$\text{ج) } \frac{a^4}{5b^2} \times \frac{25b^4}{a^3}$$

$$\text{د) } (vk+7) \times \frac{5}{4k+4}$$

۵- در حل زیر، چه قسمتی غلط می باشد؟

$$\frac{x}{x+2} - \frac{4x-1}{x+2} = \frac{x-4x+1}{x+2} = \frac{-3x+1}{x+2}$$

۶- عبارت های مرکب زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{\frac{12}{x-1}}{\frac{6}{x}}$

ب) $\frac{\frac{k+1}{2k}}{\frac{3k-1}{4k}}$

ج) $\frac{\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+1}$

د) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{3}{x}-\frac{3}{y}}$

ه) $\frac{\frac{8x-24y}{10}}{\frac{x-3y}{5x}}$

و) $\frac{y-\frac{y-3}{3}}{\frac{4}{9}+\frac{2}{3y}}$

ز) $\frac{\frac{p-p+2}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{2p}}$

ح) $\frac{\frac{x+2}{x}+\frac{1}{x+2}}{\frac{5}{x}+\frac{x}{x+2}}$

ط) $\left(\frac{\frac{1}{x}+x+2}{\frac{1}{x^2}} \right) \div \left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \right)$

۷- عبارت $\frac{x^2+7x+10}{x^2-6x} \div \frac{x^3-4x}{x^2-8x+12}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

الف) $\frac{x+5}{x^2}$

ب) $\frac{x^2}{x+5}$

ج) $\frac{(x+5)(x+2)^2}{(x-6)^2}$

د) $\frac{(x-6)^2}{(x+5)(x+2)^2}$

۸- مساحت یک مستطیل برابر با $x^2+13x+36$ می باشد. اگر طول مستطیل برابر با $x+9$

باشد، کدام یک از عبارت های زیر، بیان کننده عرض مستطیل است؟

الف) $x+4$

ب) $x+27$

ج) x^2+4

د) x^2+27

اهداف

- آشنایی با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر هم
- آشنایی با مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقیمانده در تقسیم چند جمله‌ای و رابطه بین آنها

ابزار مورد نیاز :

- ۱- شناخت کامل از چند جمله‌ای‌ها
- ۲- تعیین درجه یک چند جمله‌ای داده شده
- ۳- ساده کردن کسرها

روش تدریس

با توجه به اینکه هدف از این درس، آشنایی دانش‌آموزان با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر است، یادگیری را در ۳ مرحله انجام می‌دهیم :

مرحله اول : ساده‌ترین حالت، تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای است که در واقع یادآوری ساده کردن کسرها و نیز یادآوری قوانین مربوط به ساده کردن توان‌هاست و کافی است تنها به ارائه چند مثال بسنده کنیم.

مرحله دوم : در این مرحله تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای مورد توجه قرار می‌گیرد که قبل از شروع، ابتدا ساده کردن عددهای گویا که متشکل از یک کسر با تنها یک مخرج است، را به دانش‌آموزان یادآوری می‌کنیم و اشاره می‌کنیم که قانون حاکم بر عددهای گویا به فرم فوق را می‌توان برای تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای نیز اعمال نمود و به همین منظور، فعالیت صفحه ۱۲۶ طراحی شده است. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) به گونه‌ای طراحی شده است که در روند انجام محاسبه آنها، ساده کردن کسرها و عبارت‌های گویا، مجدداً یادآوری می‌شود و در جهت تثبیت این فعالیت، کار در کلاس صفحه ۱۲۷ طراحی شده است.

مرحله سوم : درواقع این مرحله، آخرین مرحله و کامل‌کننده بحث تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر چند جمله‌ای است. مجدداً قبل از شروع روند اعمال مورد نظر، یادآوری مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقیمانده در تقسیم دو عدد طبیعی ارائه شده است تا دانش‌آموزان در انجام تقسیم چند جمله‌ای‌ها، بهتر و روان‌تر کارهای خواسته شده را انجام دهند.

شروع روند یادگیری، با یک مثال است که به صورت دقیق و کامل، گام‌های اول، دوم و سوم جهت انجام تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر، توضیح داده شده است و بلافاصله یک فعالیت طراحی شده است که لازم است دانش‌آموزان مشابه با مثال انجام‌شده، قسمت‌های (الف) و (ب) این فعالیت را انجام دهند.

از آنجا که در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، اولین و مهم‌ترین نکته، رعایت نوشتن جملات واقع در چندجمله‌ای از توان بیشتر به توان کمتر است لذا در بخش دوم فعالیت فوق، نمونه‌ای داده شده است، که مقسوم‌علیه دارای این خاصیت نیست و لذا ابتدا باید ترتیب صعودی به نزولی رعایت شود و براساس آن، بازنویسی شود.

در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر چندجمله‌ای‌ها، مناسب است که الگوریتم ارائه شده در متن کتاب، با چند مثال ارائه شود و این مثال‌ها، به گونه‌ای باشد که به ترتیب در یک مرحله، دو مرحله و سه مرحله به پاسخ برسند و در این مثال‌ها، باقیمانده‌ای وجود نداشته باشد. سپس مثال‌هایی ارائه شود که در یک مرحله تمام می‌شوند ولی باقیمانده دارند و مفهوم باقیمانده توضیح داده شود که طبق تعریف، باید درجه آن از درجه مقسوم علیه کمتر باشد و زمانی که به این حالت می‌رسیم، عمل تقسیم پایان یافته است و در آخر، ارتباط بین مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج قسمت بیان گردد و بیان شود که باقیمانده یا صفر است و یا یک چندجمله‌ای که درجه آن اکیداً از درجه مقسوم علیه کمتر است.

در تمرین ۱، نمونه‌های مختلفی از تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر عبارت یک جمله‌ای و دوجمله‌ای داده شده است که قسمت (ج) را در این قسمت حل می‌نماییم:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{+x^3 - 2x^2} \\
 +2x^2 - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{+2x^2 \pm 4x} \\
 4x - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{+4x \pm 8} \\
 -19
 \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$(x^3 - 27) \div (x - 2) = (x^2 + 2x + 4)(x - 2) - 19$$

در تمرین ۴، هدف این است که یک ارزیابی از مفهوم بخش‌پذیری توسط دانش‌آموز داشته

باشد که حل آن به صورت زیر است :

$$\begin{array}{r}
 20x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 20x^3 + 15x^2 \\
 \hline
 8x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 -8x^2 + 6x \\
 \hline
 -16x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 \pm 16x \pm 12 \\
 \hline
 a - 12
 \end{array}$$

باقیمانده

چون باید بخش پذیر باشد، لذا باقی مانده صفر خواهد بود یعنی باید داشته باشیم $a - 12 = 0$ و این یعنی اینکه $a = 12$

توصیه های آموزشی

۱- تأکید می شود که در ابتدای شروع تقسیم چند جمله ای ها، تقسیم عددهای صحیح مورد توجه قرار گیرد و ضمن یادآوری مفهوم مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقیمانده، قوانین ساده کردن عبارت های گویا مجدداً یادآوری گردد.

۲- همواره از دانش آموزان بخواهید که قبل از شروع انجام تقسیم چند جمله ای بر یک چند جمله ای دیگر، نحوه مرتب شدن توان های متغیر داده شده را بررسی کنند و در صورتی که به ترتیب نزولی نوشته شده است، آنها را ابتدا مرتب کنند و سپس عمل تقسیم را انجام دهند.

۳- در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای باید متذکر شوید که روند تقسیم فقط تا زمانی ادامه پیدا می کند که درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

اشتباهات رایج

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان در تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای، رعایت نکردن علامت منفی در بین عبارت داده شده در صورت کسر است. به این مثال توجه کنید.

$$-\frac{45x^3 + 35x^2 - 12x + 15}{15} = -\frac{45x^3}{15} + \frac{35x^2}{15} - \frac{12x}{15} + \frac{15}{15}$$

که علامت منفی در پشت کسر باید در کل عبارت ضرب شود و صحیح آن به شکل زیر است :

$$-\frac{45}{15}x^3 - \frac{35}{15}x^2 + \frac{12}{15}x - \frac{15}{15}$$

۲- در الگوریتم تقسیم چند جمله‌ای‌ها، باید در اولین مرحله بعد از ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت، عبارت حاصل که زیر مقسوم نوشته می‌شود را تغییر علامت دهند که بعضی مواقع اشتباه می‌کنند و با همان علامت به دست آمده، الگوریتم را ادامه می‌دهند.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید :

الف) $\frac{2^0 a^4 b^5 c^6}{\sqrt{\lambda} a^2 b^6 c^3}$

ب) $\frac{2yz - xz^2 + 4xyz}{-4z^2}$

ج) $\frac{22x^2a^2 - 16x^4a^3 + 12xa - x^2a^3}{2a^2x^2}$

د) $(z^3 - 64) \div (z - 2)$

هـ) $(x + x^2 + 2x^3) \div (x - 3)$

۲- در هر یک از تقسیم‌های زیر، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید.

الف) $10 - 3x^2 + 2x^4 \mid x^2 - 5$

ب) $x - 2x^2 + 4 - 6x^3 \mid 1 - x$

۳- اگر در تقسیم $2x^2 + 5x^3 + 3x + a$ بر $x + 2$ باقیمانده صفر شود، مقدار a را تعیین کنید.

۴- در تقسیم $2x^4 - 2x^3$ بر $2x^2 + 4$ ، باقیمانده تقسیم کدام عبارت زیر است؟

الف) $2x + 4$ ب) $2x + 4$ ج) $4x + 8$ د) $-4x + 8$

۵- عبارت $3x^2 + 3x^2 - 6$ بر کدام دو جمله‌ای زیر بخش پذیر است؟

الف) $x + 1$ ب) $x - 1$ ج) $x + 2$ د) $x^2 - x$

۶- در صورتی که مقسوم $4x^2 - 4$ ، خارج قسمت $4x - 4$ و باقیمانده صفر باشد، مقسوم علیه کدام است؟

الف) $x + 1$ ب) $x - 1$ ج) $-x + 1$ د) $-x - 1$

۷- مساحت یک متوازی الاضلاع بر حسب x به صورت $-x^2 + x^3 + 1 - x$ و قاعده آن $1 - x$ است. ارتفاع آن را بیابید.

۸- مساحت یک مستطیل $5 - 4x + x^2$ و عرض آن $x - 1$ است. طول آن را بیابید.

۹- اگر در تقسیم $3x^2 + 4x + k$ بر $x - 1$ ، باقیمانده صفر شود، مقدار k را بیابید.



حل تمرین های

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$

ج) $\frac{2P}{P^2-P-12}$

$a = 0$

$y = 0$

$P^2 - P - 12 = 0$

$b = 0$

$2y - 6 = 0$

$(P+3)(P-4) = 0$

$y = 3$

$P = -3 \quad P = +4$

د) $\frac{2x+5}{x}$

ه) $\frac{x^2-1}{x+5}$

و) $\frac{a+3}{2a+1}$

$x = 0$

$x = -5$

$2a + 1 = 0$

$2a = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1 \cancel{(x-3)}}{(x-2) \cancel{(x-3)}} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{4x \cancel{(x+2)}}{12 \cancel{(x+2)}} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{24x^2}{6x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{(y-3) \cancel{(y+1)}}{\cancel{(y+1)}} = y-3$

$$\text{هـ)} \frac{1-t^4}{t^2+1} = \frac{(1-t^2)(\cancel{1+t^2})}{(\cancel{1+t^2})} = 1-t^2$$

$$\text{و)} \frac{16x^2-9y^2}{4x-3y} = \frac{(\cancel{4x-3y})(4x+3y)}{2(\cancel{4x-3y})} = \frac{4x+3y}{2}$$

$$\text{ز)} \frac{6a^4b^2}{4ab^4} = \frac{3a^3}{2b^2}$$

$$\text{ح)} \frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(\cancel{a+4})}{(\cancel{a+4})(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$\text{الف)} \frac{2y+3}{2y-3}$$

$$\text{ب)} \frac{2y-3}{3-2y} = -1$$

$$\text{ج)} \frac{2y+3}{3+2y} = 1$$

$$\text{د)} \frac{2y+3}{-2y-3} = -1$$

۴- هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

$\frac{a-2}{a+5}$ (۱)	$\frac{a+2}{a-5}$ (۲)	$\frac{a-2}{a-5}$ (۳)	$\frac{a+2}{a+5}$ (۴)	$\frac{2-a}{a+5}$ (۵)
$\frac{-a-2}{-a-5}$ (۶)	$\frac{-a-2}{5-a}$ (۷)	$\frac{a-2}{-a-5}$ (۸)	$\frac{2-a}{-a-5}$ (۹)	$\frac{-a+2}{-a+5}$ (۱۰)
(۴)	(۲)	(۵)	(۱)	(۳)

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$\text{الف)} \frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)(z^2+1)}{z^3+z}$$

$$\text{ب)} \frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{\cancel{x^2-x-6}} = \frac{3x(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\text{ج)} \frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (3y+2)$$

$$\text{د)} \frac{(x-5)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-5)} = x+1$$

۶- از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

✓ الف) $\frac{z}{t}(x+y)$ ب) $\frac{zx+y}{t}$ ✓ ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

✓ د) $z \times \frac{x+y}{t}$ ✓ هـ) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$ و) $\frac{zx}{t} + y$

تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است).

الف) $\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} = \frac{(a - 4)(\cancel{a + 4})}{(\cancel{a + 4})} \times \frac{a + 2}{(a - 4)^2} = \frac{a + 2}{a - 4}$

ب) $\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{m^2 - 1}{m + 1} = \frac{(m - 1)(m + 7)}{m + 1} \times \frac{(m - 1)(m + 1)}{m^2 - 1}$
 $= \frac{(m + 7)(m - 1)}{-1} = -(m + 7)(m - 1)$

ج) $\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18} = \frac{(x - 2)^2}{4xy(x - 2)} \times \frac{6(x^2 + 3)}{(x + 3)(x - 2)}$
 $= \frac{6(x^2 + 3)}{4xy} = \frac{3(x^2 + 3)}{2xy}$

د) $\frac{1 - c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2} = \frac{(1 - c)(1 + c)}{b^3} \times \frac{b^2}{(1 - c)^2} = \frac{1 + c}{b(1 - c)}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}$

$$= \frac{x(x^r - y^r) - y(x - y)^r}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)} = \frac{x^r + xy^r - yx^r - y^r}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)} = \frac{x^r(x - y) + y^r(x - y)}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)}$$

$$= \frac{(x^r + y^r)(x - y)}{(x^r + y^r)(x^r - y^r)} = \frac{x - y}{x^r - y^r} = \frac{1}{x + y}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \frac{\frac{x+y}{ax-bx}}{\frac{y+q}{by-ay}} &= \frac{(-y)(x+y) + (y+q)x}{x(a-b)(-y)} = \frac{-xy - y^2 + xy + qx}{x(a-b)(-y)} \\ &= \frac{qx - y^2}{x(a-b)(-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad \frac{a^r - b^r}{a - b} - \frac{a^r - b^r}{a^r - b^r} &= \frac{a^r - b^r}{(a - b)} - \frac{(a^r - b^r)}{a^r - b^r} = \frac{(a + b)(a^r - b^r) - a^r + b^r}{a^r - b^r} \\ &= \frac{a^r - ab^r + ba^r - b^r - a^r + b^r}{a^r - b^r} = \frac{ab(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{ab}{a + b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د)} \quad \frac{4 + x^r - 2x}{2 + x} - 2 - x &= \frac{4 + x^r - 2x - (x + 2)^r}{2 + x} \\ &= \frac{x^r - 2x + 4 - x^r - 4x - 4}{2 + x} = \frac{-6x}{2 + x} \end{aligned}$$

۳- فقط یکی از عبارت‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^r + 5}{a^r} \quad \text{و} \quad \frac{a^r + 3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^r + b^r}{a^r} \quad \text{و} \quad \frac{a^r - 5a}{a} \quad \checkmark = \frac{a(a - 5)}{a} = a - 5$$

۴- از میان عبارت‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب)} \quad \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج)} \quad \frac{3x}{3y} \quad \checkmark \quad \text{د)} \quad \frac{x^r}{y^r} \quad \text{ه)} \quad \frac{a^r x}{a^r y} \quad \checkmark$$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$ ب) $-\frac{x-3}{x+5}$ ج) $\frac{x-3}{x+5}$ د) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

$$= \frac{(a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$$

۸- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید (همه عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود).

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{13}}{x^{25}} = x^v$

$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$

$\frac{x^{13}}{x^{25}} = \frac{1}{x^v}$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$

$\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v+b}{5}$

$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$

$$\text{هـ)} \frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$$

$$\text{و)} \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$$

$$\frac{1}{a-b} - \frac{-1}{-a+b}$$

$$\text{ز)} \frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$$

$$\text{ح)} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{c(a+b)}{c(1+d)} = \frac{a+b}{1+d}$$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

$$\text{عرض} = x \quad \text{محیط} = 2(x + 2x - 1) = 2(3x - 1) = 6x - 2$$

$$\text{طول} = 2x - 1 \quad \text{مساحت} = x(2x - 1) = 2x^2 - x$$

$$\frac{6x-2}{2x^2-x}$$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a} = \frac{a(1-a)(a+1)}{(a^2-1)(a-a^2-a)} = \frac{a(1-a^2)}{(1-a^2)(a^2)} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}} &= \frac{\frac{x+y-2x+2y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-y)^2}} = \frac{(x-y)^2(-x+3y)}{(x-y)(x+y)(x-3y)(x+3y)} \\ &= \frac{-1(x-y)}{(x+y)(x+3y)} \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x(x-1) + (x+1) - 2(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$(x+1)^2 \quad (x-1)(x+1)$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - 2x + x + 1 - \cancel{2x^2} + 2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)^2(x-1)}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{a-2}{b}, \frac{b}{a+7}$

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{a}{a+7}, \frac{-2}{a+7}$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

مساحت مستطیل $x^2 - 9$ است.

$$A = x^2 - 9$$

$$(x^2 - 9) \div \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(\cancel{x+3})}{1} \times \frac{(\cancel{x-4})}{(\cancel{x-4})(x+3)} = x - 3$$

تمرین

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^5}{18xz^5} = \frac{-xy^3z^2}{9}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2} = \frac{2a^3y}{-5y^2} - \frac{a^4y^2}{-5y^2} + \frac{15xy}{-5y^2}$

$$= \frac{-2a^3}{5y} + \frac{a^4}{5} - \frac{3x}{y}$$

ج) $(x^3 - 27) \div (x - 2)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x^2 + 2x + 4 \end{array} \right. \\ \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ 2x^2 - 27 \\ \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ 4x - 27 \\ \underline{\pm 4x \mp 8} \\ -19 \end{array}$$

د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

$$\begin{array}{r} 3y^2 - 10y - 24 \quad \left| \begin{array}{l} 3y - 4 \\ y - 2 \end{array} \right. \\ \underline{\pm 3y^2 \mp 4y} \\ -6y - 24 \\ \underline{\mp 6y \pm 8} \\ -32 \end{array}$$

هـ) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-2x^5 - 6x^4} \\ -x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \underline{+x^4 + 3x^3} \\ x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ -x^4 - 2x + 3 \\ \underline{+x^4 + 3x} \\ -x + 3 \\ \underline{-x - 3} \\ 0 \end{array}$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

تقسیم نشان دهید. $-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad \left| \begin{array}{l} 1 - x^3 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{r} 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5 \quad \left| \begin{array}{l} -x^3 + 1 \\ -4x^3 + 3x - 4 \end{array} \right. \\ \underline{-4x^6 + 4x^3} \\ -3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5 \\ \underline{+3x^4 - 3x} \\ 4x^3 + x^2 - 3x + 5 \\ \underline{-4x^3 + 4} \\ x^2 - 3x + 9 \end{array}$$

$$4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5 = (1 - x^3)(-4x^3 + 3x - 4) + x^2 - 3x + 9$$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^3 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

$$\frac{2x^3 + 15x^2 + 28x}{x(x+4)} = \frac{\cancel{x}(2x^2 + 15x + 28)}{\cancel{x}(x+4)} = 2x + 7$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^3} + 15x^2 + 28x \quad | \quad x+4 \\ -\cancel{2x^3} - 8x \quad | \quad 2x+7 \\ \hline 7x + 28 \\ -7x - 28 \\ \hline 0 \end{array}$$

۴- اگر چند جمله‌ای $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x+3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

$$\begin{array}{r} \cancel{20x^3} + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x+3 \\ -\cancel{20x^3} - 15x^2 \quad | \quad 5x^2 + 2x - 4 \\ \hline 8x^2 - 10x \quad | \quad 2x - 1 \\ -\cancel{8x^2} - 6x \quad | \quad 16x + a \\ \hline -16x + a \quad | \quad 16x + 12 \\ +\cancel{16x} + 12 \quad | \quad a + 12 \\ \hline a + 12 \end{array}$$

$$a + 12 = 0$$

$$a = -12$$

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$$x+3 \quad \text{و} \quad x-3 \quad \text{و} \quad 2x-3 \quad \text{و} \quad 2x+3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x+3 \\ -2x^2 - 6x \quad | \quad 15x + 9 \\ \hline 15x + 9 \\ 15x + 45 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x-3 \\ -2x^2 + 6x \quad | \quad 15x - 9 \\ \hline -3x + 9 \\ +3x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x-3 \\ -2x^2 + 3x \quad | \quad 12x - 9 \\ \hline -6x + 9 \\ +6x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x+3 \\ -2x^2 - 3x \quad | \quad 12x + 9 \\ \hline -12x + 9 \\ +12x + 9 \\ \hline 18 \end{array}$$



حجم و مساحت

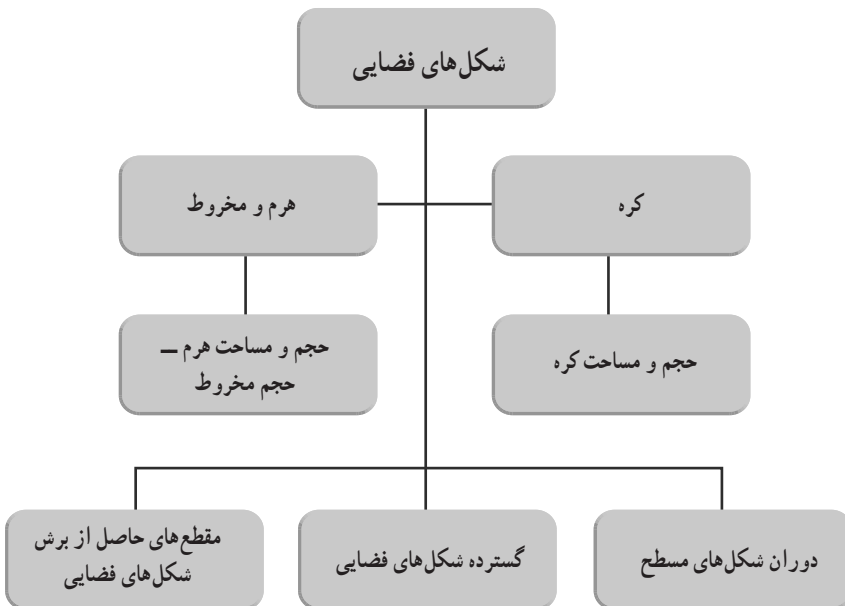


گنبد قابوس بنایی تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبدکاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنه استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

نگاه کلی به فصل

در کتاب ریاضی هفتم در مورد شکل‌های فضایی، توضیحاتی داشتیم و تقسیم‌بندی کلی آنها به سه دسته حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی را انجام دادیم. همچنین در آنجا با دستورات محاسبه مساحت جانبی و کل و حجم منشور و حجم‌های منشوری آشنا شدیم. در این کتاب دنباله این کار را با ارائه مفاهیم و دستورات مرتبط با حجم‌های کروی و هرمی پی می‌گیریم. ابتدا دستور حجم کره را به روش تجربی به دست می‌آوریم، سپس به دستور مساحت رویه کره با همان روش می‌پردازیم. در درس دوم دستور حجم هرم را به روشی نسبتاً دقیق به دست می‌آوریم و کمی هم به مساحت آن توجه می‌کنیم و دستور حجم مخروط را نیز از تعمیم آن به دست می‌آوریم و در درس سوم (درس آخر) جمع‌بندی از دستورات قبلی محاسبه سطح و حجم داریم و در کنار آن نگاهی به تقویت قوه شهود فضایی دانش‌آموزان نیز داریم. برای این منظور تمریناتی در ارتباط با ایجاد شکل‌های فضایی از طریق دوران شکل‌های مسطح هندسی و نیز کار با گسترده شکل‌های فضایی و نیز تصور هندسی نسبت به برش‌های مقطعی شکل‌های فضایی داریم.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

یکی از کاربردهای اصلی هندسه، در معماری بناها بوده است و در تاریخ کشورمان از دوران کهن تا معاصر صدها نمونه ممتاز از تأثیر آشنایی دانشمندان، ریاضی دانان و مهندسان و معماران ایرانی با دانش هندسه به وضوح دیده می شود. بنای تاریخی گنبد قابوس واقع در شهر گنبد کاووس که در قرن چهارم هجری بنا شده است یک نمونه از این بناها است. در این بنا حجم های هندسی مانند استوانه، مخروط و منشور به چشم می خورند. تقارن و زیبایی اثر، نمایانگر تسلط کامل معماران آن با دانش هندسه فضایی می باشد.

دانستنی هایی برای معلم

مباحث هندسه فضایی از دیر باز مورد توجه ریاضی دانان و حکمای قدیم بوده اند. وجود اهرام ثلاثه در مصر باستان به خوبی بیانگر آشنایی هندسه دانان مصری با شکل های فضایی بوده است. حکما و ریاضی دانان یونان باستان نیز در این زمینه تحقیقات و بحث های بسیاری داشته اند. یکی از قدیمی ترین این بحث ها، موضوع تضعیف مکعب بوده است. مسئله ای مشهور در تاریخ ریاضیات که قرن ها باعث بحث های مختلف شده است و امروزه لاینحل بودن آن به اثبات رسیده است. تضعیف مکعب، یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد (فقط به کمک خط کش غیر مدرج و پرگار) که معادل با رسم خط راستی به طول $\sqrt[3]{2}$ می باشد. در یونان باستان، ائودوکسوس (حدود ۳۷۰ قبل از میلاد) و اراتستن (حدود ۲۳۰ قبل از میلاد) و آپولونیوس (حدود ۲۲۵ قبل از میلاد) از جمله افرادی بوده اند که برای این کار روش هایی ارائه کرده اند. مسئله تضعیف مکعب به همراه دو مسئله مشهور دیگر (تثلیث زاویه و ترییع دایره) از مسائل بحث برانگیز در طی قرن ها بوده اند. یکی دیگر از ریاضی دانان یونان قدیم که کارهای برجسته ای در هندسه فضایی انجام داد، نابغه آن عصر، یعنی ارشمیدس بود. ارشمیدس تحقیقات مفصلی در زمینه محاسبات مربوط به کره، استوانه و مخروط و قطعات آنها انجام داد. یونانیان قدیم با چند وجهی های منتظم (چهاروجهی منتظم یا هرم منتظم مثلث القاعده - شش وجهی منتظم یا مکعب - هشت وجهی منتظم، دوازده وجهی منتظم و بیست وجهی منتظم) آشنا بودند و حتی نسبت به آنها دیدگاه های فلسفی خاصی داشتند. قرن ها بعد اوایل ریاضی دان بنام سوئسی رابطه معروف خود را درباره تعداد رئوس، یال ها و وجه های هر چندوجهی منتظم، اثبات کرد. این رابطه قبلاً توسط دکارت نیز کشف شده بود. مطابق این دستور اگر E تعداد یال ها، F تعداد وجه ها و V تعداد

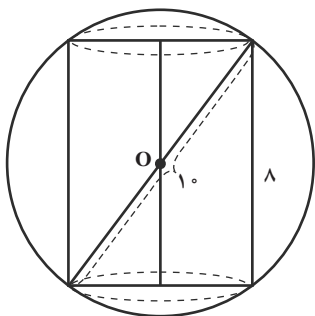
رئوس یک چندوجهی محدب باشد، آنگاه : $E=V+F-2$. ریاضی دان اروپایی دیگر که در زمینه هندسه فضایی کارهای ماندگاری انجام داد، کاوالیری بود که در سال ۱۵۹۸ در میلان به دنیا آمد و زیر نظر گالیله درس خوانده بود و در فاصله سال‌های ۱۶۲۹ - ۱۶۴۷ استاد ریاضیات دانشگاه بولونیا بود. اصول بنیان گذاشته توسط او کاربردهای زیادی در محاسبه سطح و حجم دارند. این دو اصل عبارت‌اند از :

۱- اگر دو قطعه چنان باشند که بین یک جفت خط موازی قرار گیرند و هر خط موازی آن دو خط، روی این دو قطعه، پاره خط‌های برابر جدا کند، آنگاه مساحت‌های این دو قطعه برابر است.

۲- اگر دو شکل فضایی بین یک جفت صفحه موازی قرار گیرند و هر صفحه موازی آن دو صفحه، روی این دو شکل سطح مقطع‌های برابر ایجاد کنند، آنگاه حجم‌های این دو شکل برابر است.

به کمک این اصول دستورهای مربوط به حجم هرم و کره به طور دقیق اثبات می‌شود.

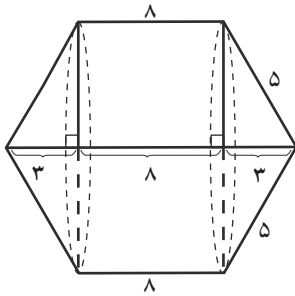
مسیرهایی برای توسعه



۱- در فعالیت مربوط به محاسبه حجم کره، با مفهوم محیط شدن و محاط شدن آشنا می‌شویم. این یکی از مباحثی است که قابلیت توسعه و تعمیق دارد و می‌توان براساس آن مسائل بیشتری را مطرح کرد، از جمله این مسئله :

— استوانه‌ای به ارتفاع ۸ سانتی‌متر در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است. حجم استوانه و حجم فضای ما بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- در کار در کلاس صفحه ۱۳۶ همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با تغییر مکان رأس هرم‌ها روی وجه بالایی مکعب، حجم هرم‌ها تغییر نمی‌کند. این می‌تواند مقدمه‌ای بر شکل‌گیری مفهوم مکان هندسی در ذهن دانش‌آموزان باشد : «مکان هندسی رأس هرم‌هایی با قاعده مستطیل ABCD که حجم ثابتی داشته باشند، صفحه‌ای موازی این مستطیل است، از اینجا می‌توان بدون نام بردن از اصطلاح «مکان هندسی» درکی شهودی از آن ایجاد کرد و مثال‌هایی از هندسه مسطحه آورد تا این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان جایی باز کند.



۳- دوران شکل‌های هندسی و ایجاد شکل‌های فضایی و محاسبه حجم آنها نیز می‌تواند به توسعه مفاهیم این فصل بیانجامد. از جمله این مسئله:

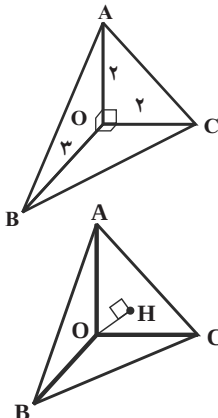
حجم حاصل از دوران یک دوزنقه متساوی الساقین به قاعده‌های ۱۴ و ۸ سانتی‌متر و ساق‌های ۵ سانتی‌متر حول قاعده بزرگ آن را به دست آورید.

معرفی منابع برای معلمان

دایرةالمعارف هندسه جلد ۱۵ و ۱۶ نوشته: محمد هاشم رستمی انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱- مساحت رویه کره‌ای، مساوی 100π واحد مربع است. حجم این کره را به دست آورید.
- ۲- اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟ حجم آن چند برابر می‌شود؟
- ۳- کره‌ای در یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم مکعب را به دست آورید.
- ۴- رأس یک نیم کره، نقطه‌ای از آن است که از قاعده نیم کره بیشترین فاصله را دارد. فاصله رأس نیم کره از مرکز قاعده و از محیط قاعده را بر حسب شعاع کره (R) به دست آورید.
- ۵- مخروطی در یک کره محاط شده است، به طوری که رأس مخروط بر رأس نیم کره واقع است و قاعده‌های مخروط و نیم کره نیز بر هم منطبق است. نسبت حجم مخروط به حجم نیم کره را به دست آورید.



- ۶- در شکل مقابل OA و OB و OC دویه‌دو بر هم عمودند. حجم هرم AOBC را به دست آورید.
- ۷- در شکل مقابل OA و OB و OC دویه‌دو بر هم عمودند و $OA=OB=OC=2$.

- الف) حجم هرم AOBC را به دست آورید.
- ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.
- ج) با توجه به حجم هرم، با قاعده مثلث ABC، فاصله O از این

قاعده (OH) را به دست آورید.

۸ - مثلث قائم الزاویه‌ای را که اضلاع زاویه قائمه آن ۶ و ۸ سانتی متر هستند، یک بار حول ضلع ۶ سانتی متری و بار دیگر حول ضلع ۸ سانتی متری دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو شکل ایجاد شده را به دست آورید.

۹ - نیم دایره‌ای به شعاع R را به شکل یک مخروط در می‌آوریم. حجم مخروط را بر حسب R به دست آورید. اگر همین نیم دایره را حول قطر آن دوران دهیم، حجم حاصل چقدر است؟ نسبت حجم این دو شکل (مخروط و شکل حاصل از دوران) را به دست آورید.

اهداف

- آشنایی با دستور محاسبه حجم کره با داشتن اندازه شعاع آن
- آشنایی با دستور محاسبه مساحت رویه کره با داشتن اندازه شعاع آن

ابزار مورد نیاز :

- ۱- ورقه طلقی شکل شفاف
- ۲- چسب و ابزار برش به مقدار کافی
- ۳- ورقه های کاغذی
- ۴- توپ پلاستیکی کوچک

روش تدریس

در ابتدای درس، پس از یادآوری انواع حجم ها از کتاب هفتم، تعریف کره با استفاده از مشابهت بین مفاهیم دایره (در صفحه) و کره در فضا انجام می گیرد : کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه آن نقطه ها از یک نقطه در فضا به نام مرکز، به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه، شعاع کره می گوئیم.

در ادامه با انجام دو فعالیت، دانش آموزان با دستورات محاسبه حجم و سطح کره به طور عملی آشنا می شوند، بدون اینکه نیازی به حفظ کردن آنها داشته باشند. هدف از انجام این دو فعالیت این است که دانش آموزان با این دو اصل آشنا شوند :

۱- حجم کره ای به شعاع R ، $\frac{2}{3}$ حجم استوانه ای است که این کره در آن قابل محاط شدن است.

۲- مساحت رویه کره ای به شعاع R چهار برابر مساحت دایره ای به همین شعاع است. با انجام درست فعالیت اول، اصل اول توسط دانش آموزان به خوبی درک شده و به خاطر سپرده می شود. دانش آموزان باید خود با دست ورزی و سعی و خطا، استوانه طلقی ای که از اطراف بر کره (توپ پلاستیکی) محیط می شود را بسازند و سپس توپ را از استوانه خارج کرده و به ترتیبی که در کتاب بیان شده است، آن را از خط برش آن نصف کرده و به دو نیم کره تفکیک کنند. یکی از دو نیم کره را در استوانه قرار دهند (هدف از این کار این است که برابری شعاع نیم کره و شعاع قاعده استوانه به صورت عملی دیده شود) آنگاه با ریختن آب توسط نیم کره دیگر، اولاً برابری حجم های دو نیم کره یادآوری شود، ثانیاً نتیجه شود که حجم استوانه سه برابر حجم نیم کره است. بنابراین حجم استوانه $\frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} \right)$

برابر حجم کره و لذا حجم کره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (کره)$$

در کار در کلاس صفحه ۱۳۲ نیز روی همین موضوع کار شده است و محاسبه‌ای عملی در ارتباط با حجم کره‌ای محاط در استوانه انجام می‌گیرد تا همان فعالیت دوباره به صورت محاسباتی تکرار شود.

در فعالیت صفحه ۱۳۳، با استفاده از یکی از همان دو نیم کره پلاستیکی دستور محاسبه مساحت رویه نیم کره و از آنجا مساحت رویه کره به صورت تجربی به دست می‌آید. دانش‌آموزان باید سعی کنند به کمک دو ورقه کاغذی دایره شکل که شعاع آنها با شعاع نیم کره برابر است، روی نیم کره را به طور کامل بپوشانند. یکی از راه‌های این کار، تقسیم هر دایره به هشت قطاع برابر است. البته بدیهی است که این پوشاندن سطح به صورت تقریبی و با خطا انجام می‌شود، ولی شهودی که از رابطه بین مساحت رویه نیم کره و مساحت دایره قاعده آن به دست می‌دهد این آمادگی ذهنی را به دانش‌آموزان می‌دهد که مساحت رویه نیم کره دو برابر مساحت دایره و در نتیجه مساحت رویه کره ۴ برابر مساحت این دایره است:

$$S = 4\pi R^2$$

در کار در کلاس این صفحه نیز محاسباتی در همین ارتباط داریم. نکته قابل توجه آن است که تفاوت بین مساحت کل یک نیم دایره توپر و یک نیم کره تو خالی در این محاسبه‌ها تجربه می‌شود. در تمرین ۱ هدف کارکردن بر روی اعداد بزرگ و یادآوری نماد علمی است. شعاع کره زمین 6400×10^3 کیلومتر و در نتیجه مساحت رویه کره زمین برابر است با:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (6400 \times 10^3)^2 = 1/6384 \times 10^8 \text{ km}^2$$

و نسبت مساحت کشور عزیزمان به مساحت رویه کره زمین برابر است با:

$$\frac{1/648 \times 10^6}{1/6384 \times 10^8} \approx 1/006 \times 10^{-2} = 1/006\%$$

یعنی مساحت کشور ما تقریباً یک درصد مساحت کره زمین است!

در تمرین ۲ توجه می‌کنیم که ارتفاع کیسول با ارتفاع استوانه برابر نیست (بدهمی رایج) ارتفاع نیم کره بالایی، مساوی شعاع قاعده استوانه، یعنی 30 سانتی متر است و لذا ارتفاع استوانه 70 سانتی متر

است. پس حجم کپسول برابر است با :

$$V = \pi (r/3)^2 \times h/7 + V \text{ (استوانه)} = V \text{ (کپسول)}$$

$$\frac{2}{3} \pi (r/3)^2 = 0.081 \pi \approx 0.254 \text{ m}^3 = 254 \text{ lit}$$

برای محاسبه سطح کپسول، برای پاسخ به قسمت بعدی مسئله، دقت کنیم که مساحت قاعده نیم کره نباید محاسبه شود (بدفهمی رایج) همچنین مساحت کل استوانه هم نباید محاسبه شود زیرا قاعده بالایی آن رنگ نمی شود؛ بنابراین :

مساحت نیم کره + مساحت جانبی استوانه + مساحت قاعده = S (کپسول)

$$= \pi (r/3)^2 + 2\pi (r/3)(h/7) + 2\pi (r/3)^2 =$$

$$= 0.69\pi \approx 2.1666 \text{ m}^2$$

$$2.1666 \times 100 = 216.66 \text{ g} \quad \text{پس مقدار رنگ لازم برابر است با :}$$

توصیه های آموزشی و بدفهمی های رایج

توصیه می شود که در حل مسائل این بخش، دانش آموزان به طور فعال با ماشین حساب کار کنند و سعی شود از مثال های عینی استفاده شود که معمولاً اندازه ها، عددهای صحیح نیستند. همچنین به تبدیل های واحدها دقت شود. برای محاسبه حجم و سطح لازم است که همه متغیرها دارای واحد (یکای) اندازه گیری همسان باشند. به عنوان مثال، اگر حجم برحسب مترمکعب خواسته شده است، لازم است که شعاع یا ارتفاع با واحد متر بیان شود و این یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان است.

همچنین توصیه می شود که حجم هایی که اندازه آنها به دست می آید، با حجم هایی که دانش آموزان می توانند آنها را مجسم کنند مقایسه شود، مانند کاری که در رابطه با حجم کپسول انجام شده است و به واحد لیتر تبدیل شده است. مثلاً می توان اشاره کرد که حجم کپسول که حدود ۲۵۴ لیتر است، چند برابر حجم یک بطری نوشابه ۱/۵ لیتری است.

اهداف

- آشنایی با دستور محاسبه حجم هرم
- آشنایی با دستور محاسبه حجم مخروط

روش تدریس

در ابتدای این درس تعریف‌های اولیه مربوط به هرم انجام می‌گیرد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد و ابهام دانش‌آموزان را نسبت به آن رفع نمود، این است که قاعده هرم نیز جزء وجه‌های آن است و در فعالیت ابتدای درس نیز روی این امر تأکید شده است. در قسمت دوم فعالیت (صفحه ۱۳۵ و ۱۳۶) هدف این است که دانش‌آموزان به طور شهودی به این حقیقت واقف شوند که اگر دو هرم دارای مساحت‌های قاعده یکسان و ارتفاع‌های برابر باشند، حجم‌های برابر دارند. اثبات دقیق این موضوع به کمک اصل کاوالیری انجام می‌شود. کار در کلاس صفحه ۱۳۶ هم معطوف به همین موضوع است. در فعالیت صفحه ۱۳۷ می‌خواهیم از همین موضوع استفاده کرده و دستور حجم هرم را استخراج نماییم. توصیه می‌شود که پرسش‌های انجام یافته را قدم به قدم با دانش‌آموزان مطرح نموده و پاسخ بگیریم.

پرسش ۱: چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟

پاسخ: با توجه به تعریف منشور، این چهارضلعی مستطیل است و قطر هر مستطیل، آن را به دو مثلث هم‌نهشت و هم مساحت تفکیک می‌کند.

پرسش ۲: چرا هرم‌های CBED و CBAD دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ: این دو هرم در رأس C مشترک‌اند و قاعده‌های آنها طبق آنچه که در پرسش (۱) دیدیم هم مساحت‌اند، پس ارتفاع آنها برابر است (عمودی که از رأس C بر هر دو قاعده رسم می‌شود) و لذا طبق نتیجه فعالیت قبل، حجم‌های یکسان دارند.

پرسش ۳: چرا مثلث‌های DEF و ABC هم مساحت‌اند؟

پاسخ: زیرا وجه‌های روبه‌رو (قاعده‌های) منشور هستند و در نتیجه هم‌نهشت و هم مساحت‌اند.

پرسش ۴: چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ: زیرا قاعده‌های آنها (مثلث‌های DEF و ABC) هم مساحت‌اند و ارتفاع‌های آنها (CF و AD) برابرند.

پرسش ۵: با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

پاسخ: سه هرم مشخص شده در شکل، حجم‌های برابر دارند و در نتیجه حجم هر یک، مساوی یک سوم حجم منشور است. کار در کلاس و فعالیت بعدی نیز به کار با دستور حجم هرم اختصاص دارد. در فعالیت (۱) کاربرد قضیه فیثاغورس را در محاسبه ارتفاع هرم منتظم با قاعده مربع می‌بینیم و از آنجا می‌توانیم حجم هرم را به دست آوریم. همانطور که می‌بینیم مثلث OBC متساوی الساقین است، پس OM میانه و ارتفاع این مثلث بوده و در مثلث قائم الزاویه OBM داریم: $OB = 10$ و $BM = \frac{BC}{2} = 6$ در نتیجه $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = 8$ و در مثلث قائم الزاویه OHM، HM موازی و نصف AB و در نتیجه مساوی ۶ سانتی متر است، پس: $OH = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{28}$ و از آنجا می‌توان حجم هرم را به دست آورد. در قسمت دوم، به تعریف مخروط از روی هرم منتظم می‌رسیم و از آنجا دستور محاسبه حجم مخروط را به دست می‌آوریم.

در کار در کلاس صفحه ۱۳۹، که یادآوری از فعالیتی از کتاب ریاضی هشتم می‌باشد، مخروطی را به کمک قطاع می‌سازیم. توصیه می‌شود که این کار را به صورت عملی و با استفاده از برش‌هایی از یک دایره کاغذی، نمایش دهیم. در این صورت بدیهی است که مولد مخروط (پاره خطی که از رأس به محیط قاعده مخروط وصل می‌شود) مساوی شعاع قطاع یعنی ۱۰ cm بوده و با توجه به اندازه شعاع قاعده مخروط (۶ cm) به کمک قضیه فیثاغورس می‌توان ارتفاع مخروط را به دست آورد و از آنجا حجم مخروط را محاسبه کرد.

تمرین ۲ شبیه فعالیت صفحه قبل است:

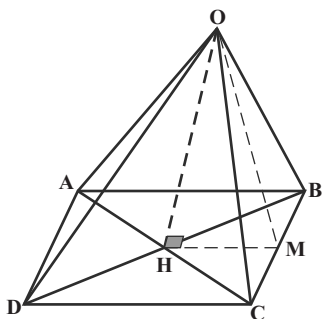
$$BC = 4 \Rightarrow BM = 2 \text{ و } OB = OC = 8$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{60}$$

$$HM = \frac{AB}{2} = 2$$

$$OH = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

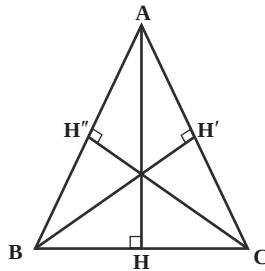
$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{14} = \frac{32\sqrt{14}}{3}$$



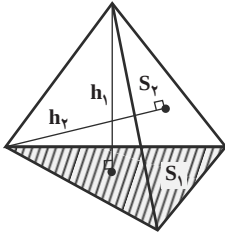
توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که به دانش‌آموزان تأکید شود که در هرم‌های چهاروجهی (هرم‌هایی که قاعده آنها مثلث است) رأس هرم می‌تواند هر یک از چهار رأس باشد و قاعده هرم نیز متغیر است و با تغییر رأس، تغییر می‌کند. درست مانند مثلث در صفحه که مساحت آن مساوی نصف حاصل ضرب هر ضلع (قاعده) در ارتفاع وارد بر آن ضلع است:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC = \frac{1}{2} CH'' \times AB$$



در مورد این گونه هرم‌ها نیز داریم:



$$V = \frac{1}{3} s_1 h_1 = \frac{1}{3} s_2 h_2 =$$

$$\frac{1}{3} s_3 h_3 = \frac{1}{3} s_4 h_4$$

اهداف

- توانایی انجام محاسبه در هندسه فضایی (یافتن اندازه‌های پاره خط‌های مجهول، مساحت روبه‌ها و حجم‌ها)
- یادآوری گسترده شکل‌های فضایی و اندازه‌ها روی آن
- توانایی تجسم فضایی و نیز توصیف دوران یافته شکل‌های مسطح که منجر به ایجاد شکل‌های فضایی شناخته شده می‌شود.

روش تدریس

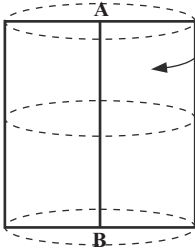
در ابتدای این بخش، فعالیتی مطرح شده که بی مقدمه، گسترده شکل‌های فضایی را مطرح کرده و اندازه‌ها را روی آن مشخص می‌کند. دانش‌آموزان باید بتوانند با توجه به اندازه‌های روی شکل فضایی آن اندازه‌ها را در گسترده آن شکل، همانندسازی کرده و از روی آنها مساحت‌ها را اندازه‌گیری کنند. یکی از محاسباتی که در اینجا یادآوری می‌شود، استفاده از قضیه فیثاغورس برای محاسبه مساحت مثلث‌های متساوی الساقین با استفاده از طول‌های ساق و قاعده آنها است.

مانند محاسبه مساحت کل هرمی با قاعده مربع به ضلع ۴ و وجه‌های جانبی مثلث‌های متساوی الساقین با ساق‌های ۸، که با رسم ارتفاع هر مثلث و این واقعیت که ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث‌ها میانه نیز هست، به کمک قضیه فیثاغورس طول ارتفاع مساوی $\sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{6^2 - 2^2}$ به دست آمده و مساحت هر مثلث متساوی الساقین برابر است با: $S = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{15}$ و مساحت گسترده هرم برابر است با: $16 + 16\sqrt{15}$ که همان مساحت کل هرم است. کار در کلاس صفحه بعد نیز همین هدف را تعقیب می‌کند و دستوری برای محاسبه مساحت کل یک هرم منتظم چهاروجهی به دست می‌دهد: $S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3} a^2$

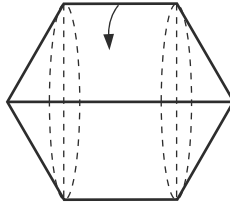
بخش (۲) کار در کلاس هم همین بحث را پی می‌گیرد (محاسبه مساحت جانبی هرمی با قاعده شش ضلعی منتظم، که مساوی شش برابر مساحت مثلثی متساوی الساقین است).

فعالیت صفحه ۱۴۱، به هدف سوم، یعنی دوران شکل‌های هندسی و رابطه آن با شکل‌های فضایی می‌پردازد. دانش‌آموزان باید به این توانایی برسند که بتوانند دوران یافته شکل‌های مسطح را در فضا تجسم کرده و آنها را رسم کنند. پیشنهاد می‌شود که در کلاس درس این کار به صورت عملی و به کمک ورقه‌های مقوایی صلب و تخت انجام گیرد تا دانش‌آموزان به تصور بهتری دست یابند. به

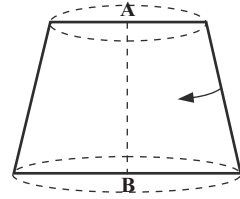
نمونه‌های زیر توجه شود :



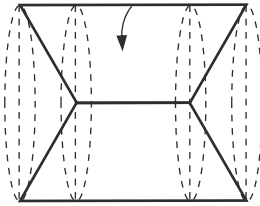
دوران یافته مستطیل
حول ضلع AB (استوانه)



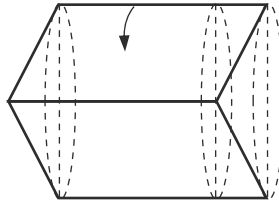
دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول قاعده
بزرگ آن (یک استوانه و دو
مخروط متصل به آن)



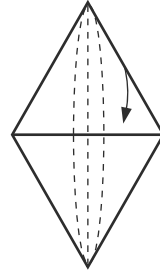
دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول محور
تقارن AB (مخروط ناقص)



دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول قاعده
کوچک (استوانه‌ای که دو
مخروط از آن حذف شده‌اند)



دوران یافته متوازی الاضلاع
حول ضلع بزرگ آن (یک استوانه که از یک
طرف یک مخروط از آن حذف شده و از
طرف دیگر مخروط به آن وصل شده است)



دوران یافته مثلث
متساوی الاضلاع حول یک
ضلع آن (دو مخروط که
قاعده مشترک دارند)

در کار در کلاس صفحه ۱۴۲، دانش‌آموزان می‌توانند با تجربه قبلی خود، تشخیص دهند که از دوران ربع دایره، حول شعاع آن، یک نیم‌کره ایجاد می‌شود و با داشتن طول شعاع آن، حجم آن را به دست آورند.

در فعالیت بعدی (در سه قسمت) تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم فضایی دانش‌آموزان است. در قسمت اول و دوم، تجسم نگاه فضایی به یک شکل و تصویری که در ذهن از آن (از سمت و سوهای مختلف) ایجاد می‌شود مد نظر است. در قسمت سوم و چهارم تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم نسبت به مقطع‌های حاصل از برش شکل‌های فضایی است. کار در کلاس صفحه ۱۴۲

نیز همین موضوع را دنبال می‌کند. پیشنهاد می‌شود که این فعالیت نیز به صورت عملی در کلاس درس اجرا شود و دانش‌آموزان با استفاده از اشیاء مناسب و قابل برش در کلاس یا منزل آن را انجام دهند و تجربه کنند.

در تمرین ۱ نسبت حجم به سطح در مورد این چهار شکل به ترتیب برابر است با :

$$۱) \text{ مکعب به ضلع } a : \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{1}{6}a$$

$$۲) \text{ کره به شعاع } a : \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{3}a$$

$$۳) \text{ استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع } a : \frac{V}{S} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{4}a$$

$$۴) \text{ استوانه به ارتفاع و قطر قاعده } a : \frac{V}{S} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{1}{6}a$$

و چنانچه دیده می‌شود در مورد کره، این نسبت از همه موارد دیگر، بزرگ‌تر است. این نسبت بیانگر آن است که به لحاظ اقتصادی، ساختن شکل‌ها به شکل کره به صرفه‌تر است، یعنی در میان اشکال هندسی با مساحت برابر، حجم کره بیشتر است، زیرا توزیع حجم آن در سطح واحد، بیشتر است.

هدف از تمرین ۲، ایجاد یک شهود ابتدایی نسبت به شکلی فضایی است که از یک ورقه مسطح ساخته می‌شود و در سال‌های بالاتر مسائلی از آن مطرح می‌شود. برای آنکه ۴ کره در این جعبه در باز جا شوند، باید داشته باشیم : $4x = 2x = a$ و در نتیجه :

$$a = 6x$$

لازم به ذکر است که البته کره‌ها از بالا، از جعبه بیرون می‌مانند و نصف آنها داخل جعبه قرار می‌گیرد.



۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر (الف)} = 1.28 \times 10^4$$

$$\text{شعاع} = 6.4 \times 10^3$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر (ب)} = 1.28 \times 10^7$$

$$\text{شعاع} = 6.4 \times 10^6$$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$\text{ج) } S = 4\pi R^2$$

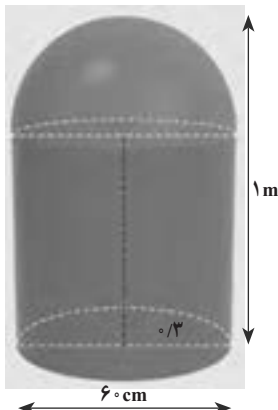
$$S = 4\pi (6.4 \times 10^3)^2 = 1.6384 \times 10^8 \text{ km}^2$$

$$S = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 = 1.6384 \times 10^{14} \text{ m}^2$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸/۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت

ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\text{د) } \frac{1.6384 \times 10^8}{1.6384 \times 10^{14}} \approx 1\%$$



۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک

استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده

کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر

حسب متر مکعب به دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم

رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم

رنگ نیاز داشته باشد؟

$$S = \circ / \mathfrak{V}^{\mathfrak{r}} \times \pi + \circ / \mathfrak{P} \times \pi \times \circ / \mathfrak{V} + \frac{1}{\mathfrak{V}} \times \mathfrak{F} \times \pi \times \circ / \mathfrak{V}^{\mathfrak{r}} = \circ / \circ \mathfrak{q} \pi + \circ / \mathfrak{F} \mathfrak{V} \pi + \circ / \mathfrak{V} \mathfrak{A} = \mathfrak{V} / \mathfrak{V} \mathfrak{m}^{\mathfrak{r}}$$

The diagram shows a bowl on the left and a cylinder on the right. The bowl has a diameter of 24 cm. The cylinder has a diameter of 24 cm and a water level height of 24 cm.

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 = 1152\pi$$

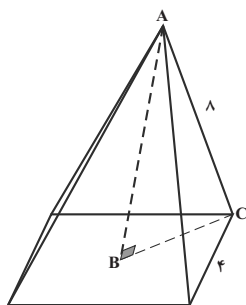
$$1152\pi = 12^2 \times \pi \times x$$

$$x = \frac{1152\pi}{144\pi} = 8\text{cm}$$
 ارتفاع آب درون استوانه

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

177



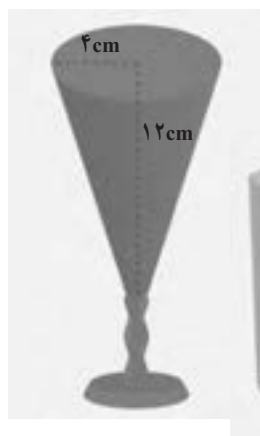
آن مثلث‌های متساوی الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

قطر قاعده به کمک رابطه فیثاغورث برابر $۲\sqrt{۲}$ است.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 \quad \text{پس } BC = 2\sqrt{2}$$

$$AB^2 = 8^2 - (2\sqrt{2})^2 = 64 - 8 = 56 \quad AB = \sqrt{56}$$

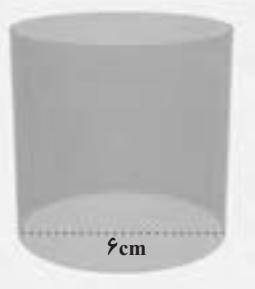
$$V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{56} = \frac{16}{3} \sqrt{56} = \frac{32\sqrt{14}}{3}$$



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟
حجم آب درون استوانه = حجم آب مخروط

$$\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = \pi \times 3^2 \times h$$

$$h = \frac{64}{9}$$



تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

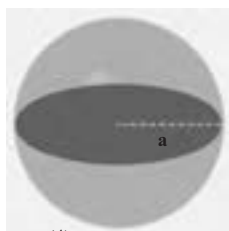
مکعب به ضلع a



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

کره به شعاع a

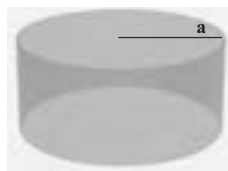


$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع و

شعاع قاعده a



$$V = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$

$$= 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع

و قطر قاعده a



$$V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + a^2$$

$$= \frac{3a^2\pi}{2}$$

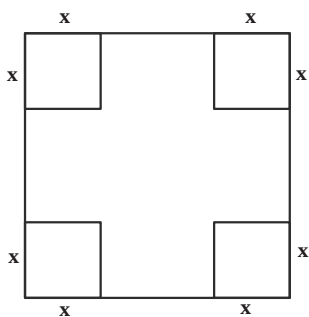
در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

$$\frac{V}{S} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a}{4}$$

$$\frac{V}{S} = \frac{a}{6}$$



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

$$4x = a - 2x$$

$$a = 6x$$

$$x = \frac{a}{6}$$

